Beiträge

zur

Geometrie der Lage

von

Dr. Karl Georg Christian v. Staudt,
ord. Professor an der Universität Erlangen.

Erstes Heft.

Nürnberg,
Verlag von Bauer und Raspe.
(Julius Merz.)
1856.

Druck von Junge & Sohn in Erlangen.

Vorwort.

Indem die Mathematik darnach strebt, Ausnahmen von Regeln zu beseitigen und verschiedene Sätze aus einem Gesichtspunkte aufzufassen, wird sie häufig genöthigt, Begriffe zu erweitern oder neue Begriffe aufzustellen, was beinahe immer einen Fortschritt in der Wissenschaft bezeichnet. Dahin gehört namentlich die Einführung von imaginären Grössen in der Analysis und die Einführung von imaginären Elementen in der Geometrie. Dass eine Ellipse oder Hyperbel durch ihre Brennpunkte und eine Tangente bestimmt ist, war schon den ältern Geometern bekannt. Dass aber die Curve aus dem Grunde bestimmt ist, weil von ihr eigentlich fünf Tangenten gegeben sind, und dass also der erwähnte Satz nur ein besonderer Fall von einem allgemeinern Satze ist, ergab sich erst aus der Betrachtung der imaginären Elemente. In meiner im Jahre 1847 erschienenen Geometrie der Lage aber konnte ich in die Lehre von den imaginären Elementen, deren Begründung der nächste Zweck dieser Beiträge ist, schon desshalb nicht tiefer eingehen, weil es mir damals noch nicht gelungen war, zwei einander conjungirte imaginäre Elemente von einander zu unterscheiden.

Dass die Theorie der imaginären Elemente, durch welche das Gebiet der Geometrie um ein Bedeutendes erweitert und zugleich die Uebersicht über die Sätze erleichtert wird, eine gewisse Ausführlichkeit in der Behandlung erfordert, liegt in der Natur der Sache. Sind ja selbst bei dem Satze, dass durch zwei Punkte eine Gerade bestimmt ist, sechs Fälle zu betrachten. In der analytischen Geometrie nennt man, was sehr einfach zu sein scheint, einen Punkt imaginär, wenn seine Coordinaten nicht sämmtlich reell sind. Indessen ist hiedurch nur die Sprache der Algebra auf die Geometrie übergetragen, keineswegs aber nachgewiesen, dass ein imaginärer Punkt, gleichwie ein reeller Punkt, etwas vom Coordinatensysteme Unabhängiges sei. Wo ist, fragt sich wohl Jeder, der imaginäre Punkt, wenn man vom Coordinatensysteme abstrahirt? So entbehrte denn bisher die Geometrie, wenn sich's von imaginären Elementen handelte, der Evidenz, welche man sonst an ihr rühmt und wohl auch mit Recht von ihr verlangt.

Erlangen, im Mai 1856.

Der Verfasser.

Inhalt.

Bemerkung. Wo der Verfasser auf einen in seiner Geometrie der Lage enthaltenen Satz sich beruft, ist der betreffenden Nummer der Buchstabe G vorgesetzt.

Beiträge

zur

Geometrie der Lage.

§. 1.

Elementargebilde.

1. Durch drei Gerade a, b, c, deren keine zwei in einerlei Ebene liegen, ist (G. 115) eine Regelschaar a b c bestimmt, welcher die drei gegebenen Geraden angehören, und welche von einer andern Regelschaar p q r die Leitschaar ist. Jede Gerade der einen Schaar schneidet jede Gerade der andern Schaar, während keine zwei Gerade, welche einer und derselben Schaar angehören, in einerlei Ebene liegen. Jeder Punkt, welcher in einer Geraden der einen Schaar liegt, liegt auch in einer Geraden der andern Schaar, daher die Fläche a b c mit der Fläche p q r zusammenfällt. Liegt eine Gerade ausserhalb der Regelfläche, so hat sie mit derselben höchstens zwei Punkte gemein, da jede Gerade, welche mehr als zwei Gerade der einen Schaar schneidet, ein Leitstrahl dieser Schaar und also eine Gerade der andern Schaar ist. Jede Ebene, welche durch eine Gerade a der einen Schaar geht, geht auch durch eine Gerade p der andern Schaar und schmiegt im Schnittpunkte der beiden Geraden der Regelfläche sich an, indem alle Punkte, welche diese Fläche mit der Ebene a p gemein hat, in den beiden Geraden a, p liegen und also jede dritte Gerade, welche der Ebene a p angehört und durch den Punkt a p geht, in diesem Punkte die Regelfläche berührt. Jede Gerade, welche die Fläche in zwei Punkten a q, b p schneidet, ist zugleich die Schnittlinie

von zwei der Fläche sich anschmiegenden Ebenen ap, bq. Und wenn durch eine ausserhalb der Fläche liegende Gerade zwei derselben sich anschmiegende Ebenen gehen, so schneidet die Gerade die Fläche in zwei Punkten.

Der Ausdruck Regelschaar ist auch in der Folge immer in der obigen Bedeutung zu nehmen, so dass es also zu jeder Regelschaar eine andere giebt, welche von der erstern und von welcher die erstere die Leitschaar ist. Eine Regelschaar und

ein gerades Gebilde sollen zu einander perspektivisch heissen, wenn der Träger des geraden Gebildes ein Leitstrahl der Regelschaar ist, und auf jeden Punkt desselben die durch ihn gehende Gerade der Regelschaar bezogen wird.

ein Ebenenbüschel I. Ordnung sollen zu einander perspektivisch heissen, wenn die Axe des Büschels ein Leitstrahl der Regelschaar ist, und auf jede Ebene desselben die in ihr liegende Gerade der Regelschaar bezogen wird.

2. Eine Curve II. Ordnung und ein Strahlenbüschel I. Ordnung, welche in einerlei Ebene liegen, sollen zu einander perspektivisch heissen, wenn der Mittelpunkt S des Büschels ein Punkt der Curve ist, und auf jeden andern Punkt P derselben der durch ihn gehende Strahl SP des Büschels bezogen wird. Dem Punkt S entspricht der Strahl SS, welcher durch keinen andern Punkt der Curve geht.

Ein Strahlenbüschel II. Ordnung und ein gerades Gebilde sollen zu einander perspektivisch heissen, wenn der Träger s des geraden Gebildes ein Strahl des Büschels ist und auf jeden andern Strahl p desselben der in ihm liegende Punkt des geraden Gebildes bezogen wird. Dem Strahle s entspricht der Punkt ss, durch welchen kein anderer Strahl des Büschels geht.

Werden zwei in einerlei Ebene liegende Gebilde, welche nach den obigen Erklärungen zu einander perspektivisch sind, aus einem und demselben ausserhalb der Ebene liegenden Punkte projicirt, so hat man vier Gebilde, unter welchen auch ein Ebenenbüschel ist. Das Punktgebilde und der Ebenenbüschel sollen nicht nur zu jedem der beiden übrigen Gebilde, sondern auch zu einander perspektivisch heissen.

3. Unter einem Elementargebilde ist entweder ein einförmiges

Gebilde oder eine Curve oder eine Kegelfläche oder ein Büschel II. Ordnung oder eine Regelschaar zu verstehen, so dass es also drei Arten von Elementargebilden I. Ordnung und fünf Arten von Elementargebilden II. Ordnung giebt. Eine Curve II. Ordnung kann auch ein Punktgebilde II. Ordnung genannt werden. Eine Kegelfläche II. Ordnung ist als Elementargebilde nichts anderes als der Inbegriff von allen in ihr liegenden Geraden.

Alle einförmigen Gebilde, welche zu einem und demselben Elementargebilde perspektivisch sind, sind zu einander projektivisch. — Es sind hiemit nur mehrere bekannte Sätze in eine Aussage zusammengefasst.

4. Zwei zu einander projektivische nicht in einander liegende gerade Gebilde erzeugen ein zu ihnen perspektivisches drittes Elementargebilde, welches entweder ein Strahlenbüschel erster oder zweiter Ordnung oder eine Regelschaar ist.

Zwei zu einander projektivische Strahlenbüschel I. Ordnung, welche in einerlei Ebene liegen, aber nicht einerlei Mittelpunkt haben, erzeugen ein zu ihnen perspektivisches Punktgebilde erster oder zweiter Ordnung. Dasselbe gilt von einem Strahlenbüschel I. Ordnung und einem zu demselben projektivischen Ebenenbüschel I. Ordnung, dessen Achse weder durch den Mittelpunkt des Strahlenbüschels geht noch mit ihm in einerlei Ebene liegt.

Zwei zu einander projektivische nicht in einander liegende Ebenenbüschel I. Ordnung erzeugen ein zu ihnen perspektivisches drittes Elementargebilde, welches entweder ein Strahlenbüschel I. Ordnung oder eine Kegelfläche oder eine Regelschaar ist.

Zwei zu einander projektivische Strahlenbüschel I. Ordnung, welche einerlei Mittelpunkt haben aber nicht in einerlei Ebene liegen, erzeugen einen zu ihnen perspektivischen Ebenenbüschel erster oder zweiter Ordnung. Dasselbe gilt von einem Strahlenbüschel I. Ordnung und einem zu demselben projektivischen geraden Gebilde, dessen Träger weder durch den Mittelpunkt des Büschels geht noch mit ihm in einerlei Ebene liegt.

5. Wenn in einem einförmigen Gebilde die Elemente A, C durch die Elemente B, D harmonisch getrennt sind, und ein Ele-

ment d, welches dem Gebilde nicht angehört, entweder durch D geht, ohne durch B zu gehen, oder in D liegt, ohne in B zu liegen, so sollen die Elemente A, C auch durch die Elemente B, d harmonisch getrennt heissen. Wenn ferner das Element b entweder durch B geht, ohne durch D zu gehen, oder in B liegt, ohne in D zu liegen, so sollen die Elemente A, C auch durch die Elemente b, d harmonisch getrennt heissen.

Ist also F eine Fläche II. Ordnung und S ein ausserhalb derselben befindlicher Punkt, so sind je zwei Punkte der Fläche, welche mit dem Punkte S in einer und derselben Geraden liegen, so wie auch je zwei der Fläche sich anschmiegende Ebenen, welche die Polare U des Punktes S in einer und derselben Geraden schneiden, durch den Punkt S und die Ebene U harmonisch getrennt. — Durch zwei nicht in einerlei Ebene liegende Gerade und

einen Punkt, welcher in keiner von den beiden Geraden liegt, ist ein anderer Punkt bestimmt, welcher vom erstern durch die gegebenen Geraden harmonisch getrennt ist.

eine Ebene, welche durch keine von den beiden Geraden geht, ist eine andere Ebene bestimmt, welche von der erstern durch die gegebenen Geraden harmonisch getrennt ist.

6. In einem Elementargebilde II. Ordnung sollen vier Elemente harmonisch liegend heissen, wenn diess von den ihnen entsprechenden Elementen irgend eines und also eines jeden einförmigen Gebildes gilt, welches zu dem Gebilde II. Ordnung perspektivisch ist. Es ist hiernach in jedem Elementargebilde durch drei Elemente A, B, C ein viertes Element D bestimmt, welches nämlich zu den drei gegebenen Elementen das vierte harmonische Element ist.

Berührt eine Curve II. Ordnung in den Punkten A, C die Geraden a, c, so sind in der Curve je zwei Punkte B, D, welche mit dem Punkte ac in einer und derselben Geraden liegen, durch die Punkte A, C und in dem der Curve sich anschmiegenden Strahlenbüschel je zwei Strahlen b, d, welche die Gerade AC in einem und demselben Punkte schneiden, durch die Strahlen a, c harmonisch getrennt. Bezieht man nämlich den Strahlenbüschel A auf die Curve perspektivisch, so entsprechen den Punkten A, B, C, D die Strahlen a, AB, AC, AD, welche harmonisch liegen,

weil die Punkte B, D durch den Punkt ac und die Gerade AC harmonisch getrennt sind.

7. Gleichwie zwei einförmige Gebilde, so sollen überhaupt zwei Elementargebilde zu einander projektivisch heissen, wenn sie so auf einander bezogen sind, dass je vier harmonisch liegenden Elementen in dem einen Gebilde vier harmonisch liegende Elemente im andern entsprechen. Zwei ungleichartige Elementargebilde sind zu einander perspektivisch, heisst nun nichts anderes, als dass sie zu einander projektivisch sind und überdiess jedes Element des einen von den beiden Gebilden in dem ihm entsprechenden Elemente des andern liegt. Es ergeben sich hieraus und aus der Lehre von den einförmigen Gebilden nachstehende Sätze:

Ist von beliebig vielen Elementargebilden das zweite zum ersten, jedes folgende zu einem der vorhergehenden projektivisch, so sind alle zu einander projektivisch. — Zwei zu einander projektivische Elementargebilde, welche in einander liegen, haben, wenn nicht jedes Element des einen Gebildes mit dem ihm entsprechenden Elemente des andern zusammenfällt, höchstens zwei Elemente entsprechend gemein. — Will man zwei Elementargebilde projektivisch auf einander beziehen, so kann man zu drei Elementen des einen Gebildes drei Elemente des andern, welche jenen entsprechen sollen, nach Belieben annehmen, wodurch aber alsdann jedem Elemente des einen Gebildes ein Element des andern zugewiesen ist. — Sind zwei Elementargebilde zu einander projektivisch aber nicht perspektivisch, so kann man sie doch als das erste und letzte von drei oder mehreren Elementargebilden betrachten, von welchen das zweite zum ersten und so jedes folgende zum vorhergehenden perspektivisch ist. — Sind zwei Systeme zu einander projektivisch, so entspricht, da je zwei homologe einförmige Gebilde derselben zu einander projektivisch sind, überhaupt jedem Elementargebilde, welches in dem einen Systeme enthalten ist, ein zu demselben projektivisches Elementargebilde im andern.

Wenn von zwei zu einander projektivischen Elementargebilden ABC..., abc... die Rede ist, so versteht es sich von selbst, dass den Elementen A, B, C des einen Gebildes die Elemente a, b, c des andern entsprechen. Will man andeuten, dass ferner dem Elemente D des erstern Gebildes das Element d des letztern

entspreche, so darf man nur die Gebilde durch ABCD . . ., abcd . . . bezeichnen.

8. Will man zwei räumliche Systeme projektivisch so auf einander beziehen, dass den drei Geraden a, b, c des einen Systems, von welchen keine zwei sich schneiden, die drei Geraden a_1, b_1, c_1 des andern Systems entsprechen, von welchen ebenfalls keine zwei in einerlei Ebene liegen, so kann man noch zu drei Leitstrahlen p, q, r der Regelschaar abc drei Leitstrahlen p_1, q_1, r_1 der Regelschaar $a_1 b_1 c_1$, welche jenen entsprechen sollen, nach Belieben annehmen, und es ist alsdann nur noch festzusetzen, ob die Systeme collineär oder reciprok zu einander sein sollen.

Bezieht man nämlich die räumlichen Systeme projektivisch so auf einander, dass den Punkten ap, aq, bp, bq, cr des einen Systems die Punkte (oder die Ebenen) a_1p_1, a_1q_1, b_1p_1, b_1q_1, c_1r_1 des andern entsprechen, so entsprechen den Geraden a, b, p, q des erstern Systems die Geraden a_1, b_1, p_1, q_1 des letztern. Ferner entspricht der Geraden c, welche durch den Punkt cr geht und die Geraden p, q schneidet, die Gerade c_1, welche durch den Punkt $c_1 r_1$ geht (in der Ebene $c_1 r_1$ liegt) und die Geraden p_1, q_1 schneidet. Eben so entspricht der Geraden r die Gerade r_1. Jeder Geraden d der Regelschaar abc entspricht eine Gerade d_1 der Regelschaar $a_1 b_1 c_1$, so dass die einförmigen Gebilde p (abcd), p_1 ($a_1 b_1 c_1 d_1$) zu einander projektivisch sind, daher der obige Satz auch so ausgesprochen werden kann:

Will man zwei zu einander projektivische Regelschaaren abcd . . ., $a_1 b_1 c_1 d_1$ . . . als homologe Gebilde von zwei zu einander projektivischen räumlichen Systemen betrachten, so kann man zu drei Leitstrahlen p, q, r der einen Regelschaar drei Leitstrahlen p_1, q_1, r_1 der andern, welche jenen entsprechen sollen, nach Belieben annehmen und hat alsdann nur noch festzusetzen, ob die Systeme collineär oder reciprok zu einander sein sollen.

Auch zwei (nach 7) zu einander projektivische Elementargebilde II. Ordnung, von welchen keines eine Regelschaar ist, sind nichts anderes als homologe Gebilde von zwei zu einander projektivischen Systemen. Man nehme an, dass eine Kegelfläche abcde... und ein Strahlenbüschel $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1$ . . . II. Ordnung zu einander projektivisch sind, so sind auch der zur Kegelfläche perspektivische

Ebenenbüschel a (a b c d e . . .) und das zu dem Strahlenbüschel perspektivische gerade Gebilde a_1 (a_1 b_1 c_1 d_1 e_1 . . .) zu einander projektivisch. Bezieht man also den Strahlenbündel, welcher den Punkt a b zum Mittelpunkt hat, und das ebene System, dessen Träger die Ebene a_1 b_1 ist, projektivisch so auf einander, dass den Geraden a, b, c, d die Geraden a_1, b_1, c_1, d_1 entsprechen, so entspricht der Kegelfläche abcde ... der Strahlenbüschel $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1$...

9. Wenn ein Strahlenbüschel a b c d... I. Ordnung und eine Curve ABCD... II. Ordnung zu einander projektivisch sind, der Mittelpunkt des Büschels aber ausserhalb der Curve liegt, so gehen höchstens drei Strahlen des Büschels durch die ihnen entsprechenden Punkte der Curve.

Wenn ein gerades Gebilde und ein Strahlenbüschel II. Ordnung zu einander projektivisch sind, der Träger des erstern Gebildes aber kein Strahl des letztern ist, so liegen höchstens drei Punkte des geraden Gebildes in den ihnen entsprechenden Strahlen des Büschels.

Man nehme an, dass die Strahlen a, b, c beziehlich durch die Punkte A, B, C gehen. Es sei ferner S derjenige Punkt der Curve, welcher aus dem Punkte A durch den Strahl a projicirt wird. Da nun der zur Curve ABCD... perspektivische Strahlenbüschel S (ABCD...) auch zu dem Büschel a b c d... projektivisch ist, so liegt der Schnittpunkt der Geraden SD, d in der Geraden BC, also ausserhalb der Curve und mithin der Punkt D ausserhalb der Geraden d.

Wenn also ein einförmiges Gebilde und ein Elementargebilde II. Ordnung, welches keine Regelschaar ist, zu einander projektivisch sind, und mehr als drei Elemente des einen Gebildes in den ihnen entsprechenden Elementen des andern liegen, so sind die Gebilde zu einander perspektivisch. Ist ein einförmiges Gebilde zu einer Regelschaar projektivisch, so kann man schon, wenn drei Elemente des einen Gebildes in den ihnen entsprechenden Elementen des andern liegen, daraus schliessen, dass die Gebilde zu einander perspektivisch sind.

10. Wenn ein gerades Gebilde ABC... und eine Curve ABC_1... II. Ordnung, welche

Wenn ein Strahlenbüschel erster und ein Strahlenbüschel zweiter Ordnung, welche zu ein-

zu einander projektivisch sind, zwei Punkte A, B entsprechend gemein haben, so erzeugen sie einen zu ihnen perspektivischen Strahlenbüschel I. Ordnung.

ander projektivisch sind, zwei Strahlen entsprechend gemein haben, so sind sie zu einem und demselben geraden Gebilde perspektivisch.

Das gerade Gebilde und die Curve können nämlich nur auf eine Art projektivisch so auf einander bezogen werden, dass den Punkten A, B, C der Geraden die Punkte A, B, C_1 der Curve entsprechen. Diess geschieht aber, wenn man beide Gebilde auf den Strahlenbüschel perspektivisch bezieht, dessen Mittelpunkt S in der Curve liegt und aus dem Punkte C_1 derselben durch die Gerade C_1 C projicirt wird.

Anm. Aus jedem Satze, in welchem von zwei in einerlei Ebene liegenden zu einander projektivischen Gebilden die Rede ist, welche ein zu ihnen perspektivisches Gebilde erzeugen, ergeben sich zwei oder drei ihm verwandte Sätze, wenn man jene Gebilde aus einem und demselben ausserhalb der Ebene befindlichen Punkte projicirt.

Man hat dann vier zu einander projektivische Gebilde, von welchen je zwei, deren keines das andere projicirt, ein zu ihnen perspektivisches Gebilde erzeugen.

11. Zwei zu einander projektivische Curven II. Ordnung, welche drei Punkte A, B, C entsprechend gemein haben aber nicht in einander liegen, erzeugen einen zu ihnen perspektivischen Strahlenbüschel I. Ordnung.

Zwei zu einander projektivische Strahlenbüschel II. Ordnung, welche drei Strahlen entsprechend gemein haben aber nicht in einander liegen, erzeugen ein zu ihnen perspektivisches gerades Gebilde.

Es bezeichne S, im Falle die Curven noch einen Punkt mit einander gemein haben, diesen vierten Schnittpunkt, im Falle aber die Curven in einem der drei Punkte sich berühren, diesen Berührungspunkt. Bezieht man nun beide Curven auf den Strahlenbüschel S perspektivisch, so sind sie projektivisch so auf einander bezogen, dass sie die drei Punkte A, B, C entsprechend gemein haben, woraus der Satz folgt. — Im erstern der erwähnten Fälle hat die Gerade, welche im Punkte S die eine Curve berührt, mit der andern noch einen Punkt gemein, der dem Punkte S der erstern

entspricht. Wenn also auch zwei zu einander projektivische nicht in einander liegende Elementargebilde II. Ordnung vier Elemente mit einander gemein haben, so haben sie doch höchstens drei von diesen Elementen entsprechend gemein.

Aus dem obigen Satze ergiebt sich ein einfaches Verfahren, durch welches man, wenn zwei Curven II. Ordnung und drei Schnittpunkte A, B, C derselben gegeben sind, ihren vierten Schnittpunkt S finden kann. Ein anderes Verfahren besteht in Folgendem:

Es sei P der Pol der Geraden AB in Hinsicht auf die eine Curve und P_1 der Pol der Geraden AB in Hinsicht auf die andere Curve. Es sei ferner F der Punkt, welcher vom Schnittpunkte der Geraden AB, PP_1 durch die Punkte A, B harmonisch getrennt ist. Da nun der Punkt F in Hinsicht auf beide Curven der Pol der Geraden PP_1 ist, so ist S derjenige Punkt der Geraden FC, welcher vom Punkte C durch den Punkt F und die Gerade PP_1 hormonisch getrennt ist. Würde die Gerade PP_1 durch einen der drei Punkte A, B, C gehen, so würden in diesem Punkte die Curven sich berühren.

12. Jede Regelschaar abcd... wird von jeder der Regelfläche sich nicht anschmiegenden Ebene U in einer zu ihr perspektivischen Curve U (abcd...) geschnitten und aus jedem ausserhalb der Regelfläche befindlichen Punkte S durch einen zu ihr perspektivischen Ebenenbüschel S (abcd...) II. Ordnung projicirt.

Je zwei zur Regelschaar perspektivische Ebenenbüschel I. Ordnung werden von der Ebene U in zwei zu einander projektivischen Strahlenbüscheln I. Ordnung geschnitten. Die Curve, welche diese Strahlenbüschel erzeugen, ist auch zu den beiden Ebenenbüscheln und daher auch zur Regelschaar perspektivisch.

13. Wenn eine Curve II. Ordnung zu einer Regelschaar oder zu einer Kegelfläche II. Ordnung projektivisch ist, und vier

Je zwei zur Regelschaar perspektivische gerade Gebilde werden aus dem Punkte S durch zwei zu einander projektivische Strahlenbüschel projicirt. Der Ebenenbüschel II. Ordnung, welchen diese Strahlenbüschel erzeugen ist auch zu den beiden geraden Gebilden und daher auch zur Regelschaar perspektivisch.

Wenn ein Ebenenbüschel II. Ordnung zu einer Regelschaar oder zu einem Strahlen-

Punkte der Curve in den ihnen entsprechenden Geraden des andern Gebildes liegen, so sind die beiden Gebilde zu einander perspektivisch.

büschel II. Ordnung projektivisch ist und vier Ebenen des erstern Gebildes durch die ihnen entsprechenden Geraden des letztern gehen, so sind die beiden Gebilde zu einander perspektivisch.

Denn die Ebene, in welcher die Curve liegt, schneidet die Regelschaar oder Kegelfläche in einer zu diesem Gebilde perspektivischen Curve. Da nun die beiden Curven zu einander projektivisch sind und vier Punkte entsprechend gemein haben, so liegen sie in einander und haben alle ihre Punkte entsprechend gemein. — Weiss man von einer Curve II. Ordnung, welche zu einer Regelschaar oder Kegelfläche projektivisch ist, dass sie in der Fläche liegt, so kann man schon, wenn drei Punkte der Curve in den ihnen entsprechenden Geraden des andern Gebildes liegen, daraus schliessen, dass die Gebilde zu einander perspektivisch sind.

14. Zwei zu einander projektivische Regelschaaren $a b c \ldots$, $a_1 b_1 c_1 \ldots$, von welchen jede die Leitschaar der andern ist, erzeugen eine zu ihnen perspektivische Curve II. Ordnung und zugleich einen zu ihnen perspektivischen Ebenenbüschel II. Ordnung.

Die beiden Regelschaaren können nämlich nur auf eine Art projektivisch so auf einander bezogen werden, dass den Geraden a, b, c der einen Schaar die Geraden a_1, b_1, c_1 der andern entsprechen. Diess geschieht aber, wenn man je zwei in der Regelfläche liegende Gerade, welche die durch die drei Punkte $a a_1$, $b b_1$, $c c_1$ gehende Ebene U in einem und demselben Punkte schneiden oder aus dem Schnittpunkte S der drei Ebenen $a a_1$, $b b_1$, $c c_1$ durch eine und dieselbe Ebene projicirt werden, einander entsprechend nennt. — Da die Curve, in welcher die Regelfläche von der Ebene U geschnitten wird, mit jeder Ebene des der Regelfläche sich anschmiegenden Ebenenbüschels S nur einen Punkt gemein hat, so folgt noch, dass der Ebenenbüschel ein Schein des der Curve sich anschmiegenden Strahlenbüschels und die Curve ein Schnitt der dem Ebenenbüschel sich anschmiegenden Kegelfläche ist.

Anm. In G. 329 war noch nachzuweisen, dass das daselbst erwähnte Polarsystem kein Nullsystem sei, was nun daraus hervorgeht,

weil jeder ausserhalb der Regelfläche liegende Punkt S auch ausserhalb seiner Polare U liegt.

15. Durch eine Curve II. Ordnung und zwei nicht in einerlei Ebene liegende Gerade a, b, welche den Träger der Curve in zwei in ihr befindlichen Punkten schneiden, ist eine zur Curve perspektivische Regelschaar bestimmt, von welcher die beiden gegebenen Geraden Leitstrahlen sind.

Durch einen Ebenenbüschel II. Ordnung und zwei sich nicht schneidende Gerade, welche aus dem Mittelpunkte des Büschels durch zwei Ebenen desselben projicirt werden, ist eine zu dem Büschel perspektivische Regelschaar bestimmt, von welcher die gegebenen Geraden Leitstrahlen sind.

Bezieht man die beiden Ebenenbüschel a, b auf die Curve perspektivisch, so erzeugen sie die im Satze erwähnte Regelschaar, welche von einer andern zur Curve perspektivischen Regelschaar, der die beiden Geraden a, b angehören, die Leitschaar ist. — Unter dem Träger eines ebenen nicht geraden Gebildes ist die Ebene zu verstehen, in der das Gebilde liegt.

16. Wenn ein gerades Gebilde $ABC\ldots$ und eine Curve $AB_1C_1\ldots$ II. Ordnung, welche zu einander projektivisch sind, einen Punkt A entsprechend gemein haben aber nicht in einerlei Ebene liegen, so erzeugen sie eine zu ihnen perspektivische Regelschaar.

Wenn ein Ebenenbüschel erster und ein Ebenenbüschel zweiter Ordnung, welche zu einander projektivisch sind, eine Ebene entsprechend gemein haben, aber der Mittelpunkt des letztern Büschels nicht in der Axe des erstern liegt, so erzeugen sie eine zu ihnen perspektivische Regelschaar.

Denn die zur Curve $AB_1C_1\ldots$ perspektivische Regelschaar, welcher die Geraden BB_1, CC_1 angehören, ist auch (9) zu dem geraden Gebilde $ABC\ldots$ perspektivisch.

17. Zwei zu einander projektivische Curven $ABCD\ldots$ $ABC_1D_1\ldots$ II. Ordnung welche zwei Punkte A, B entsprechend gemein haben aber nicht in einerlei Ebene liegen, erzeu-

Zwei zu einander projektivische Ebenenbüschel II. Ordnung, welche zwei Ebenen entsprechend gemein aber nicht einerlei Mittelpunkt haben, erzeugen ein zu ihnen perspekti-

gen ein zu ihnen perspektivisches Gebilde, welches entweder eine Regelschaar oder eine Kegelfläche II. Ordnung ist.

visches Gebilde, welches entweder eine Regelschaar oder ein Strahlenbüschel II. Ordnung ist.

Denn die zur Curve ABCD... perspektivische Regelschaar oder Kegelfläche, welcher die beiden Geraden CC_1, DD_1 angehören, ist (13) auch zur Curve ABC_1D_1... perspektivisch. Die Curven erzeugen eine Kegelfläche oder Regelschaar, je nachdem die Geraden, welche denselben in den Punkten C, C_1 sich anschmiegen, die Gerade AB in einem und demselben Punkte oder in zwei Punkten schneiden.

18. Wenn ein gerades Gebilde ABCD... und eine Regelschaar abcd... projektivisch aber nicht perspektivisch zu einander sind, und irgend ein Punkt A des erstern Gebildes in der ihm entsprechenden Geraden a des letztern liegt, so erzeugen die beiden Gebilde einen zu ihnen perspektivischen Ebenenbüschel erster oder zweiter Ordnung.

Wenn ein Ebenenbüschel I. Ordnung und eine Regelschaar projektivisch aber nicht perspektivisch zu einander sind, und irgend eine Ebene des erstern Gebildes durch die ihr entsprechende Gerade des letztern geht, so erzeugen die beiden Gebilde ein zu ihnen perspektivisches Punktgebilde erster oder zweiter Ordnung.

Denn der Ebenenbüschel, welcher die Regelschaar abcd... aus der Schnittlinie oder dem Schnittpunkte der Ebenen Bb, Cc, Dd, projicirt, ist, da vier Ebenen desselben durch die ihnen entsprechenden Punkte A, B, C, D des geraden Gebildes gehen, auch (9) zu diesem Gebilde perspektivisch.

In dem Satze linker Hand kann ein Strahlenbüschel II. Ordnung, welcher mit dem geraden Gebilde nicht in einerlei Ebene liegt, in dem Satze rechter Hand aber eine Kegelfläche II. Ordnung, deren Mittelpunkt nicht in der Axe des Ebenenbüschels liegt, die Stelle der Regelschaar vertreten. Nur ist alsdann das Gebilde, welches die zu einander projektivischen Gebilde erzeugen, nothwendig ein Gebilde II. Ordnung.

19. Wenn ein gerades Gebilde ABC... und eine Curve AB_1C_1... II. Ordnung, wel-

Wenn ein Strahlenbüschel erster und ein Strahlenbüschel zweiter Ordnung, welche zu

che zu einander projektivisch sind, in einerlei Ebene liegen, und einen Punkt A entsprechend gemein haben, so erzeugen sie einen zu ihnen perspektivischen Strahlenbüschel erster oder zweiter Ordnung.

einander projektivisch sind, in einerlei Ebene liegen und einen Strahl entsprechend gemein haben, so erzeugen sie ein zu ihnen perspektivisches Punktgebilde erster oder zweiter Ordnung.

Betrachtet man die Curve $AB_1C_1\ldots$ als den Schnitt einer Regelschaar, so folgt der Satz aus dem vorigen.

20. Wenn eine Curve und ein Büschel II. Ordnung oder eine Kegelfläche und ein Ebenenbüschel II. Ordnung zu einander projektivisch sind und fünf Elemente A, B, C, D, E des einen Gebildes in den ihnen entsprechenden Elementen A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 des andern liegen, so sind die Gebilde zu einander perspektivisch.

Es sei das eine Gebilde eine Curve und das andere ein Ebenenbüschel II. Ordnung, so ist nur zu beweisen, dass es ein aus Geraden bestehendes Elementargebilde giebt, welches zu den beiden erstern perspektivisch ist.

Liegt der Mittelpunkt S des Ebenenbüschels in der Curve, so ist (9) der zur Curve perspektivische Strahlenbüschel S (ABCDE...) auch zum Ebenenbüschel perspektivisch, woraus zugleich hervorgeht, dass in diesem Falle der Träger U der Curve ein Element des Ebenenbüschels ist. Und wenn die Ebene U dem Ebenenbüschel angehört, so ist der zu diesem Büschel perspektivische Strahlenbüschel U $(A_1B_1C_1D_1E_1\ldots)$ auch zur Curve perspektivisch und daher S ein Punkt der Curve. Wenn aber der Punkt S nicht in der Curve liegt, und also auch die Ebene U kein Element des Ebenenbüschels ist, so erzeugt jedes zu diesem Büschel perspektivische und also auch zur Curve projektivische gerade Gebilde p $(A_1B_1C_1D_1E_1\ldots)$, dessen Träger p die Ebene U im Punkte A schneidet und, im Falle durch den Punkt A nur die Ebene A_1 des Büschels geht, in dieser Ebene, im Falle aber durch den Punkt A noch eine Ebene des Büschels geht, in dieser andern Ebene liegt, mit der Curve eine Regelschaar, welche nicht nur (16) zu den beiden Punktgebilden, sondern auch (13) zu dem Ebenenbüschel perspektivisch ist. Bemerkt man noch, dass auch jeder Leitstrahl der erwähnten Regelschaar durch einen Punkt der Curve geht und in einer Ebene des Ebenenbüschels liegt, so folgt:

Wenn eine Curve und ein Ebenenbüschel II. Ordnung, dessen Mittelpunkt nicht in der Curve liegt, zu einander perspektivisch sind, so bleiben sie es auch, wenn man jede Ebene des Büschels, welche die Curve in dem ihr entsprechenden Punkte und also in noch einem Punkte schneidet, auf diesen andern Punkt oder, was dasselbe ist, auf jeden Punkt der Curve, durch welchen nicht nur die ihm entsprechende Ebene, sondern noch eine Ebene des Büschels geht, diese andere Ebene bezieht.

21. Wenn eine Curve ABCDE... II. Ordnung und eine Regelschaar abcde... projektivisch aber nicht perspektivisch zu einander sind, und irgend zwei Punkte A, B der Curve in den ihnen entsprechenden Geraden a, b der Regelschaar liegen, so erzeugen die Gebilde einen zu ihnen perspektivischen Ebenenbüschel erster oder zweiter Ordnung.

Wenn ein Ebenenbüschel II. Ordnung und eine Regelschaar projektivisch aber nicht perspektivisch zu einander sind, und irgend zwei Ebenen des Büschels durch die ihnen entsprechenden Geraden der Regelschaar gehen, so erzeugen die beiden Gebilde ein zu ihnen perspektivisches Punktgebilde erster oder zweiter Ordnung.

Denn der Ebenenbüschel, welcher die Regelschaar abcde... aus der Schnittlinie oder dem Schnittpunkte der Ebenen Cc, Dd, Ee projicirt, ist auch zur Curve ABCDE... perspektivisch.

In dem Satze linker Hand kann ein Strahlenbüschel II. Ordnung, welcher mit der Curve nicht in einerlei Ebene liegt, in dem Satze rechter Hand aber eine Kegelfläche II. Ordnung, welche mit dem Ebenenbüschel nicht einerlei Mittelpunkt hat, die Stelle der Regelschaar vertreten. Nur ist alsdann das Gebilde, welches die zu einander projektivischen Gebilde erzeugen, nothwendig ein Gebilde II. Ordnung.

22. Haben zwei zu einander projektivische Curven II. Ordnung, welche in einerlei Ebene U liegen, zwei Punkte entsprechend gemein, so erzeugen sie entweder einen zu ihnen perspektivischen Strahlenbüschel erster

Haben zwei zu einander projektivische Strahlenbüschel II. Ordnung zwei Strahlen entsprechend gemein, so erzeugen sie entweder ein zu ihnen perspektivisches Punktgebilde erster oder zweiter Ordnung, oder es giebt

oder zweiter Ordnung, oder es giebt ausserhalb der beiden Curven einen Punkt, welcher mit je zwei homologen Punkten derselben in einer und derselben Geraden liegt.

eiue Gerade, welche keinem der Büschel angehört aber von je zwei homologen Strahlen derselben in einem und demselben Punkte geschnitten wird.

Denn jede Regelschaar, welche zu der einen Curve perspektivisch ist, erzeugt (21) mit der andern einen zu allen drei Gebilden perspektivischen Ebenenbüschel, welcher, wenn er ein Büschel I. Ordnung ist oder sein Mittelpunkt ausserhalb der Ebene U liegt, von dieser Ebene in einem zu den beiden Curven perspektivischen Strahlenbüschel geschnitten wird. Liegt aber der Mittelpunktdes Ebenenbüschels in der Ebene U, so findet der letzte der im Satze erwähnten Fälle statt.

23. Zwei zu einander projektivische Curven II. Ordnung, welche in einander aber nicht involutorisch liegen, erzeugen einen zu ihnen perspektivischen Strahlenbüschel II. Ordnung.

Zwei zu einander projektivische Strahlenbüschel II. Ordnung, welche in einander aber nicht involutorisch liegen, erzeugen eine zu ihnen perspektivische Curve II. Ordnung.

Denn jede zu der einen Curve perspektivische Regelschaar erzeugt (14) mit ihrer zur andern Curve perspektivischen Leitschaar einen zu allen vier Gebilden perspektivischen Ebenenbüschel, welcher von der Ebene, in der die Punktgebilde liegen, in einem zu beiden perspektivischen Strahlenbüschel geschnitten wird.

24. Der Inbegriff von vier Elementen A, B, C, D eines und desselben Elementargebildes, mit Rücksicht auf die Ordnung, in der dieselben angeschrieben werden, und mit Rücksicht auf das Elementargebilde selbst, soll ein Wurf heissen. Es ist hiernach nicht nur der Wurf ABCD von dem Wurfe ABDC sondern auch, im Falle zwei nicht in einander liegende Elementargebilde die Elemente A, B, C, D mit einander gemein haben, der Wurf ABCD in dem einen von dem Wurfe ABCD in dem andern zu unterscheiden.

Zwei Würfe ABCD, $A_1 B_1 C_1 D_1$, nämlich der Wurf ABCD in dem Elementargebilde G und der Wurf $A_1 B_1 C_1 D_1$ in dem Elementargebilde G_1 sollen zu einander projektivisch heissen, wenn

die Gebilde G, G_1 projektivisch so auf einander bezogen werden können, dass den Elementen A, B, C, D des einen die Elemente A_1, B_1, C_1, D_1 des andern entsprechen. Da hiernach je zwei Würfe, welche zu einem und demselben dritten Wurfe projektivisch sind, auch unter sich projektivisch sind, und da jedes Elementargebilde II. Ordnung auf jedes einförmige Gebilde projektivisch bezogen werden kann, so folgt aus der Lehre von den einförmigen Gebilden:

Unter den 24 Würfen, welche in einem Elementargebilde aus vier Elementen A, B, C, D desselben sich bilden lassen, indem man diese Elemente in jeder Ordnung anschreibt, sind entweder acht harmonische Würfe oder es ist keiner derselben harmonisch. Im ersteren Falle ist jeder der 24 Würfe zu sieben andern, im letztern Falle aber zu drei andern projektivisch. In jedem Falle ist nämlich ABCD $\barwedge$ BADC $\barwedge$ CDAB $\barwedge$ DCBA.

25. Durch zwei nicht in einerlei Ebene liegende Gerade a, c und zwei

Punkte B, D, welche mit keiner der Geraden in einerlei Ebene liegen, sind zwei Gerade b, d bestimmt, welche durch die gegebenen Geraden harmonisch getrennt sind und beziehlich durch die gegebenen Punkte gehen.	Ebenen, welche die Geraden in vier verschiedenen Punkten schneiden, sind zwei Gerade bestimmt, welche durch die gegebenen Geraden harmonisch getrennt sind und beziehlich in den gegebenen Ebenen liegen.

Es sei B_1 derjenige in der Schnittlinie der Ebenen Da, Dc befindliche Punkt, welcher vom Punkte D durch die Geraden a, c harmonisch getrennt ist, so ist b die Gerade, welche die Punkte B, B_1 mit einander verbindet und d die durch den Punkt D gehende Gerade der Regelschaar a b c. Die Geraden b, d sind übrigens auch bestimmt, wenn der Wurf a b c d, anstatt harmonisch zu sein, zu irgend einem gegebenen Wurfe projektivisch ist.

26. Wenn zwei nicht in einerlei Ebene liegende Gerade a, c zwei Kanten p, q eines Tetraeders schneiden und durch zwei andere Kanten b, d desselben harmonisch getrennt sind, so sind sie auch durch die beiden übrigen Kanten harmonisch getrennt.

Da nämlich p (a b c d), q (a d c b) harmonische Würfe sind,

so sind die Geraden a, c auch durch die Geraden harmonisch getrennt, von welchen die eine den Punkt pb mit dem Punkte qd und die andere den Punkt pd mit dem Punkte qb verbindet.

27. Wenn zwei Kanten b, d eines Tetraeders der einen und zwei andere Kanten b_1, d_1 desselben Tetraeders der andern von zwei Regelschaaren angehören, welche zwei Gerade a, c mit einander gemein haben, so sind diese sowohl durch die beiden erstern als auch durch die beiden letztern Kanten des Tetraeders harmonisch getrennt, während die beiden übrigen Kanten desselben zwei gemeinschaftliche Leitstrahlen der Regelschaaren sind.

Denn da die Gerade p, welche durch den Punkt $b b_1$ geht und die Geraden a, c schneidet, auch die Geraden d, d_1 schneidet, aber nicht in der Ebene $d d_1$ liegt, so muss sie durch den Punkt $d d_1$ gehen. Eben so geht ein anderer gemeinschaftlicher Leitstrahl q der beiden Regelschaaren durch die beiden Punkte $b d_1$, $b_1 d$. Da nun der Wurfe p (a b c d) sowohl zu dem Wurf q (a b c d) als auch zu dem Wurfe q ($a b_1 c d_1$) projektivisch, so ist auch q (a b c d) $\barwedge$ q (a d c b), woraus man schliessen kann, dass die Punkte qa qc durch die Punkte qb, qd und mithin die Geraden a, c sowohl durch die Geraden b, d als auch durch die Geraden b_1, d_1 harmonisch getrennt sind.

28. Durch einen Wurf a b c d und vier gleichartige Elemente A, B, C, D, welche entweder in einerlei Ebene liegen oder durch einen und denselben Punkt gehen, von welchen aber keine drei in einem und demselben einförmigen Gebilde enthalten sind, ist ein Elementargebilde II. Ordnung bestimmt, welchem die vier gegebenen Elemente angehören, so dass überdiess der Wurf ABCD in demselben zu dem gegebenen Wurfe projektivisch ist.

Es seien A, B, C, D die vier Eckpunkte eines Vierecks, so giebt es in jeder durch den Punkt D gehenden Geraden u, welche die drei Geraden BC, AC, AB in drei verschiedenen Punkten A_1, B_1, C_1, schneidet, einen Punkt D_1, so dass der Wurf $A_1 B_1 C_1 D_1$ zu dem Wurfe a b c d projektivisch ist. Legt man nun durch die Punkte A, B, C eine Curve K II. Ordnung, welche die Gerade u in den Punkten D, D_1 schneidet oder, wenn D_1 mit D zusammenfällt, in diesem Punkte berührt, so ist der Wurf ABCD in der Curve K zu dem Wurfe D_1 (ABCD), also auch (G. 221) zu

dem Wurfe $A_1 B_1 C_1 D_1$ und mithin auch zu dem gegebenen Wurfe projektivisch. Ist K_1 eine andere Curve II. Ordnung, welche durch die vier Punkte A, B, C, D geht, und D_2 derjenige Punkt derselben, welcher aus dem Punkte D durch die Gerade u projicirt wird, so ist der Wurf ABCD in der Curve K_1 zu dem Wurfe $A_1 B_1 C_1 D_2$ projektivisch und also zu dem Wurf abcd nicht projektivisch.

---

§. 2.

Flächen II. Ordnung.

29. Durch zwei sich nicht schneidende Gerade p, q und drei Punkte A, B, C, von welchen keine zwei mit einer der Geraden in einerlei Ebene liegen, ist eine Regelfläche F bestimmt, welche durch die beiden gegebenen Geraden und durch die drei gegebenen Punkte geht.

Durch zwei nicht in einerlei Ebene liegende Gerade und drei Ebenen, welche die Geraden in sechs verschiedenen Punkten schneiden, ist eine Regelfläche bestimmt, welche durch die beiden gegebenen Geraden geht und den drei gegebenen Ebenen sich anschmiegt.

Unter einer Regelfläche ist hier und auch in der Folge immer eine Fläche II. Ordnung zu verstehen, welche zwei Schaaren von Geraden enthält. Bezieht man die Ebenenbüschel p, q projektivisch so auf einander, dass den Ebenen pA, pB, pC des einen die Ebenen qA, qB, qC des andern entsprechen, so erzeugen sie diejenige in der Fläche F enthaltene Regelschaar, von welcher die Geraden p, q Leitstrahlen sind. Durch ein Tetraeder und

einen Punkt, welcher in keiner Seite desselben liegt, sind drei Regelflächen bestimmt, deren jede durch vier Kanten des Tetraeders und durch den gegebenen Punkt geht.

eine Ebene, welche durch keinen Eckpunkt desselben geht, sind drei Regelflächen bestimmt, deren jede durch vier Kanten des Tetraeders geht und der gegebenen Ebene sich anschmiegt.

30. Von zwei Regelflächen soll gesagt werden, dass sie in einer Geraden p, welche sie mit einander gemein haben, sich berühren, wenn jede durch diese Gerade gehende Ebene beiden Flächen

in einem und demselben Punkte sich anschmiegt, mithin jede Gerade, welche in der einen Fläche aber ausserhalb der andern liegt und mit der Geraden p einen Punkt gemein hat, in diesem die andere berührt.

Werden zwei Regelschaaren, von welchen die Gerade p ein gemeinschaftlicher Leitstrahl ist, auf den Ebenenbüschel p perspektivisch bezogen, so sind sie auch unter sich projektivisch und werden also von der Geraden p in zwei zu einander projektivischen geraden Gebilden geschnitten, welche, wenn die Regelflächen in der Geraden p sich nicht berühren höchstens zwei Punkte entsprechend gemein haben. In diesem Falle enthält also jede von beiden Regelschaaren höchstens zwei Gerade, welche die andere Regelfläche nicht schneiden.

31. Durch eine Regelfläche F, eine in ihr liegende Gerade p und drei Punkte A, B, C, von welchen keine zwei mit der Geraden p in einerlei Ebene und wenigstens einer ausserhalb der Fläche F liegt, ist eine andere Regelfläche F_1 bestimmt, welche die gegebene in der gegebenen Geraden berührt und durch die drei gegebenen Punkte geht.

Durch eine Regelfläche, eine in ihr liegende Gerade und drei Ebenen, welche die Gerade in drei verschiedenen Punkten schneiden und nicht alle drei der Regelfläche sich anschmiegen, ist eine andere Regelfläche bestimmt, welche die gegebene in der gegebenen Geraden berührt und den drei gegebenen Ebenen sich anschmiegt.

Es seien A_1, B_1, C_1 die Punkte, in welchen die Ebenen pA, pB, pC der Fläche F sich anschmiegen, so ist F_1 die Regelfläche, welche durch die drei Geraden AA_1, BB_1, CC_1 geht.

32. Wenn zwei Regelflächen, welche in einer Geraden sich berühren, in einem ausserhalb dieser Geraden liegenden Punkte einer und derselben Ebene sich anschmiegen, so berühren sie sich in noch einer Geraden.

Haben nämlich zwei Regelflächen, welche in einer Geraden p sich berühren, irgend einen ausserhalb dieser Geraden liegenden Punkt A mit einander gemein, so haben sie auch, da die Ebene pA beiden in einem und demselben Punkte sich anschmiegt, die Gerade a mit einander gemein, welche diesen Punkt mit dem Punkte A verbindet. Wenn nun alle gemeinschaftlichen Punkte

der beiden Flächen in den Geraden p,a liegen, folglich jede dritte Gerade, welche in der einen Fläche liegt, mit der andern nur einen Punkt gemein hat, so berühren sich die Flächen auch in der Geraden a. Wenn aber die Flächen irgend einen ausserhalb der Geraden a,p befindlichen Punkt B und also noch eine Gerade b, welche die Gerade p schneidet, mit einander gemein haben, so haben sie doch keine dritte solche Gerade und also auch keinen ausserhalb der drei Geraden p, a, b liegenden Punkt mit einander gemein, daher in diesem Falle jede Gerade q, welche in der einen Fläche aber mit der Geraden p nicht in einerlei Ebene liegt, die andere Fläche in zwei Punkten aq, bq schneidet und also keine Ebene beiden Flächen in einem und demselben ausserhalb der Geraden p liegenden Punkte sich anschmiegt.

33. Durch eine Regelfläche F, zwei in ihr liegende sich schneidende Gerade a,p und

einen Punk Q, welcher weder in der Fläche noch mit den beiden Geraden in einerlei Ebene liegt, ist eine andere Regelfläche bestimmt, welche nämlich die gegebene in den gegebenen Geraden berührt und durch den gegebenen Punkt geht.

eine Ebene, welche weder der Fläche sich anschmigt noch durch den Schnittpunkt der beiden Geraden geht, ist eine andere Regelfläche bestimmt, welche nämlich die gegebene in den gegebenen Geraden berührt und der gegebenen Ebene sich anschmiegt.

Es sei Q_1 der Punkt, in welchem die Ebene aQ der Fläche F sich anschmiegt. Legt man nun (31) durch die beiden Geraden p, $Q Q_1$ eine Regelfläche, welche die gegebene in der Geraden p berührt, so berühren sich (32) die beiden Flächen auch in der Geraden a.

34. Wenn von zwei Geraden u, v, welche einen Punkt S mit einander gemein haben, die eine u

die drei Seiten B C, A C,A B eines Dreiecks A B C in drei verschiedenen Punkten A_1, B_1, C_1 schneidet, die andere v aber mit keiner Seite desselben in einerlei Ebene liegt, so ist der Wurf $A_1\, B_1\, C_1$ S zu dem Wurfe v (A B C u) projektivisch.

die drei Seiten b c, a c, a b eines Dreikants in drei verschiedenen Punkten A_1, B_1, C_1, die andere v aber alle drei Seiten im Mittelpunkte desselben schneidet, so ist der Wurf $A_1\, B_1\, C_1$ S zu dem Wurfe v (a b c u) projektivisch.

Denn der Wurf $A_1\, B_1\, C_1\, S$ ist (G. 221) zu dem Wurfe S ($A B C A_1$) projektivisch, welcher von dem Wurfe v (ABCu) ein Schnitt ist.

35. Wenn eine Gerade u die Seiten BCD, ACD, ABC eines Tetraeders ABCD in vier verschiedenen Punkten A_1, B_1, C_1, D_1 schneidet, so ist der Wurf $A_1\, B_1\, C_1\, D_1$ zu dem Wurfe u (ABCD) projektivisch.

Projicirt man nämlich den Wurf $A_1\, B_1\, C_1\, D_1$ aus dem Punkte D auf die Ebene ABC, so erhält man einen Wurf $A_2\, B_2\, C_2\, D_1$, welcher zu dem erstern projektivisch ist. Da nun die Punkte A_2, B_2, C_2 beziehlich in den Geraden BC, AC, AB liegen, mithin (34) $A_2\, B_2\, C_2\, D_1 \barwedge$ u (ABCD) ist, so ist auch $A_1\, B_1\, C_1\, D_1 \barwedge$ u (ABCD). — Wenn das Tetraeder ABCD gegeben, der Wurf $A_1\, B_1\, C_1\, D_1$ aber und also auch der Wurf u (ABCD) zu einem gegebenen Wurfe projektivisch ist, und die Gerade u

durch einen gegebenen Punkt geht, welcher in keiner Seite des Tetraeders liegt, so liegt sie (28) in einer gegebenen Kegelfläche II. Ordnung.

in einer gegebenen Ebene liegt, welche durch keinen Eckpunkt des Tetraeders geht, so berührt sie eine gegebene Curve II. Ordnung.

36. Durch ein Tetraeder ABCD, eine Gerade u, welche keine Kante desselben schneidet und

eine Ebene uE, welche durch die Gerade u aber durch keinen Eckpunkt des Tetraeders geht, ist eine Kegelfläche II. Ordnung bestimmt, welche durch die vier Eckpunkte des gegebenen Tetraeders geht und in der gegebenen Geraden die gegebene Ebene berührt.

einen Punkt, welcher in der Geraden u aber in keiner Seite des Tetraeders liegt, ist eine Curve II. Ordnung bestimmt, welche die vier Seiten des gegebenen Tetraeders und überdiess in dem gegebenen Punkte die gegebene Gerade berührt.

Bezieht man den Ebenenbüschel u und das gerade Gebilde u projektivisch so auf einander, dass den Ebenen uA, uB, uC die Punkte A_1, B_1, C_1 entsprechen, in welchen die Gerade u die Ebenen BCD, ACD, ABD schneidet, so ist der Punkt E_1, welcher der Ebene uE entspricht, der Mittelpunkt der im Satze erwähnten Kegelfläche. Denn nach 34 ist, wenn man die Gerade DE_1 durch

v bezeichnet, der Wurf $A_1 B_1 C_1 E_1$ zu dem Wurfe v (ABCu) projektivisch. Da nun $A_1 B_1 C_1 E_1 \barwedge$ u (ABCE), so ist auch v (ABCu) $\barwedge$ u (ABCE), woraus man schliessen kann, dass die Kegelfläche II. Ordnung, welche durch die fünf Geraden u, v, $E_1 A$, $E_1 B$, $E_1 C$ geht, in der Geraden u die Ebene uE berührt. Diese Ebene ist zugleich der Träger derjenigen Curve II. Ordnung, welche die vier Seiten des Tetraeders ABCD und überdiess im Punkte E_1 die Gerade u berührt.

Anm. Das Reciproke von einer Kegelfläche II. Ordnung, als deren Elemente die in ihr liegenden Punkte betrachtet werden, ist ein durch eine Curve II. Ordnung bestimmter Ebenenbündel II. Ordnung, welchem nämlich der Träger der Curve und jede Ebene angehört, die die Curve berührt.

37. Durch zwei sich schneidende Gerade g, h und ein Tetraeder ABCD, dessen vier

Eckpunkte aus den zwei Geraden durch acht verschiedene Ebenen projicirt werden, ist eine Fläche F II. Ordnung bestimmt, welche durch die beiden gegebenen Geraden und durch die vier Eckpunkte des gegebenen Tetraeders geht.

Seiten von den zwei Geraden in acht verschiedenen Punkten geschnitten werden, ist ein Ebenenbündel II. Ordnung bestimmt, in welchem die beiden Ebenenbüschel f, g und die vier Seiten des gegebenen Tetraeders enthalten sind.

In der Geraden g, welche von den Ebenen BCD, ACD, ABD in den Punkten A_1, B_1, C_1 geschnitten werde, gibt es einen Punkt S, so dass der Wurf $A_1 B_1 C_1 S$ und also auch (34), wenn man die Gerade DS durch v bezeichnet, der Wurf v (ABCg) zu dem Wurfe h (ABCg) projektivisch ist. Fällt nun der Punkt S mit dem Punkte gh zusammen, so ist die im Satze erwähnte Fläche eine Kegelfläche, im entgegengesetzten Falle aber eine Regelfläche.

38. Wenn in einem Polarsysteme jedem Eckpunkte des Tetraeders ABCD die ihm gegenüberliegende Seite und der Geraden u, welche keine Kante des Tetranders schneidet, die Gerade v zugeordnet ist, so sind die Würfe u (ABCD), v (ABCD) zu einander projektivisch.

Da nämlich den Ebenen vA, vB, vC, vD die Punkte A_1, B_1, C_1, D_1 zugeordnet sind, in welchen die Gerade u die Ebenen BCD, ACD,

ABD, ABC schneidet, so ist der Wurf v $(ABCD)$ zu dem Wurfe $A_1 B_1 C_1 D_1$ und also auch (35) zu dem Wurfe u $(ABCD)$ projektivisch. Eben so ist, wenn die Gerade v die Ebenen BCD, ACD, ABD, ABC in den Punkten A_2, B_2, C_2, D_2 schneidet, auch der Wurf $A_2 B_2 C_2 D_2$ zu den erwähnten drei Würfen projektivisch.

Haben also die Geraden u, v einen Punkt mit einander gemein, so gibt es eine Kegelfläche II. Ordnung, welche durch die beiden Geraden und die vier Eckpunkte des Tetraeders geht, und eine Curve II. Ordnung, welche die beiden Geraden und die vier Seiten des Tetraeders berührt. Liegen aber die Geraden u, v nicht in einerlei Ebene, so gibt es eine Regelfläche, welche durch die beiden Geraden und die vier Eckpunkte des Tetraeders geht, und eine andere Regelfläche, welche ebenfalls durch die beiden Geraden geht und den vier Seiten des Tetraeders sich anschmiegt.

39. Durch ein Tetraeder $ABCD$ und zwei Gerade, u, v, aus welchen die Eckpunkte des Tetraeders durch zwei zu einander projektivische Würfe u $(ABCD)$, v $(ABCD)$ projicirt werden, ist ein Polarsystem bestimmt, in welchem jedem Eckpunkte des Tetraeders die ihm gegenüberliegende Seite und jeder von den beiden gegebenen Geraden die andere zugeordnet ist.

Es schneide die Gerade u die Ebenen BCD, ACD, ABD, ABC in den Punkten A_1, B_1, C_1, D_1, so ist der Wurf $A_1 B_1 C_1 D_1$ zu dem Wurfe u $(ABCD)$ und daher auch zu dem Wurfe v $(ABCD)$ projektivisch. Es sei ferner E_1 irgend ein fünfter Punkt der Geraden u und vE eine durch die Gerade v gehende Ebene, so dass v $(ABCE) \barwedge A_1 B_1 C_1 E_1$ ist, so ist auch v $(ABCDE) \barwedge A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$. Da nun der Punkt E_1 in keiner Seite des Tetraeders liegt und die Ebene vE durch keinen Eckpunkt desselben geht, so gibt es ein aber auch nur ein Polarsystem, in welchem jedem Eckpunkte des Tetraeders die ihm gegenüberliegende Seite, und dem Punkte E_1 die Ebene vE, mithin dem geraden Gebilde $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ ein Ebenenbüschel s $(ABCDE)$ zugeordnet ist, dessen Axe s in der Ebene vE liegt. Weil aber s $(ABCDE) \barwedge A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 \barwedge$ v $(ABCDE)$ ist und die Ebene vE durch keinen Eckpunkt des Tetraeders geht, so folgt, dass die Gerade s mit der Geraden v zusammenfällt. Auf analoge Art werden nachstehende Sätze bewiesen:

Durch ein Tetraeder ABCD und eine Gerade u, welche keine Kante desselben schneidet, ist ein Polarsystem bestimmt, in welchem jeder Eckpunkt des gegebenen Tetraeders der ihm gegenüberliegenden Seite, die gegebene Gerade u aber sich selbst zugeordnet ist. — Durch ein Tetraeder ABCD und zwei Gerade u, v, welche zwei einander gegenüberliegende Kanten AB, CD desselben beziehlich schneiden, so dass nämlich die Gerade u nur die Kante AB und die Gerade v nur die Kante CD schneidet, ist ein Polarsystem bestimmt, in welchem jedem Eckpunkte des Tetraeders die ihm gegenüberliegende Seite und der Geraden u die Gerade v zugeordnet ist.

40. Durch ein Tetraeder ABCD, eine Gerade u, welche keine Kante des Tetraeders schneidet, und

einen Punkt S, welcher in keiner Seite desselben liegt, ist eine Kegelfläche II. Ordnung bestimmt, so dass in jedem Polarsysteme, in welchem das gegebene Tetraeder als Polartetraeder enthalten und dem gegebenen Punkte die gegebene Gerade conjugirt ist, dieser Geraden eine in der Kegelfläche liegende Gerade zugeordnet ist.	eine Ebene, welche durch keinen Eckpunkt desselben geht, ist ein Strahlenbüschel II. Ordnung bestimmt, so dass in jedem Polarsysteme, in welchem das gegebene Tetraeder als Polartetraeder enthalten und der gegebenen Ebene die gegebene Gerade conjugirt ist, dieser Geraden ein Strahl des Büschels zugeordnet ist.

Nach 28 gibt es eine Kegelfläche S, welche durch die vier Geraden SA, SB, SC, SD geht, so dass überdiess der Wurf S (ABCD) in derselben zu dem Wurfe u (ABCD) projektivisch ist. Wenn nun in einem Polarsysteme, in welchem das Polartetraeder ABCD enthalten ist, dem Punkte S eine durch die Gerade u gehende Ebene uE und also der Geraden u eine durch den Punkt S gehende Gerade v zugeordnet ist, so liegt diese, da v (ABCD) $\barwedge$ u (ABCD) ist, in der Kegelfläche S. — Schneidet die Gerade v die Ebenen BCD, ACD, ABD in den Punkten A_1, B_1, C_1, so ist der Wurf $A_1 B_1 C_1 S$ dem Wurfe u (ABCE) zugeordnet und also zu diesem projektivisch. Da aber auch (36), wenn die der Kegelfläche S in der Geraden v sich anschmiegende Ebene durch vP bezeichnet wird, $A_1 B_1 C_1 S \barwedge$ v (ABCP) und

daher auch v (ABCP) $\barwedge$ u (ABCE) ist, so folgt, dass die Ebene uE und die Gerade v homologe Elemente der zu einander projektivischen Gebilde u (ABCD...), S (ABCD...) sind.

Will man durch sechs gegebene Punkte A, B, C, D, E, S, von welchen keine vier in einerlei Ebene liegen, und eine gegebene Gerade u, welche nicht mit zwei von den sechs Punkten in einer und derselben Ebene liegt, eine Fläche II. Ordnung legen, so kommt es nur darauf an, eine durch den Punkt S gehende Gerade s zu finden, so dass s (ABCDE) $\barwedge$ u (ABCDE) ist. Man suche zu dem Ende in dem Polarsysteme, in welchem das Polartetraeder ABCD enthalten und dem Punkte S die Ebene uE zugeordnet ist, die der Geraden u zugeordnete und also durch den Punkt S gehende Gerade v. Geht nun diese Gerade auch durch den Punkt E, so kann s jede Gerade der Kegelfläche II. Ordnung sein, welche durch die fünf Geraden SA, SB, SC, SD, v geht, daher es in diesem Falle unendlich viele Flächen II. Ordnung gibt, welche durch die sechs gegebenen Punkte und durch die gegebene Gerade u gehen. Wenn aber die Gerade v nicht durch den Punkt E geht, so ist s diejenige Gerade der erwähnten Kegelfläche, welche aus der Axe v durch die Ebene vE projicirt wird.

41. Durch eine Curve K II. Ordnung, eine Gerade p, welche den Träger der Curve in einem in ihr liegenden Punkte schneidet, und zwei Punkte A, B, welche ausserhalb der erwähnten Ebene und auch mit der Geraden p nicht in einerlei Ebene liegen, ist eine Fläche F II. Ordnung bestimmt, welche nämlich durch die gegebene Curve, durch die gegebene Gerade und durch die beiden gegebenen Punkte geht.

Es seien A_1, B_1 diejenigen Punkte der Curve K, welche aus der Axe p durch die Ebenen pA, pB projicirt werden. Wenn nun die Geraden AA_1, BB_1 die Gerade p in einem und demselben Punkte schneiden, so ist F die Kegelfläche, welche aus diesem Punkte die Curve K projizirt. Wenn aber die Geraden AA_1, BB_1 nicht in einerlei Ebene liegen, so ist (15) die Fläche F eine Regelfläche.

Geht eine Fläche II. Ordnung durch eine Gerade und durch zwei Punkte, welche ausserhalb dieser Geraden aber mit ihr in einerlei Ebene liegen, so geht sie auch durch die Gerade, welche

die beiden Punkte mit einander verbindet. Geht eine Fläche II. Ordnung durch die vier Eckpunkte eines vollständigen ebenen Vierecks und durch eine Gerade, welche keine Seite desselben schneidet, so geht sie auch durch die Curve II. Ordnung, welche die vier Eckpunkte des Vierecks enthält und mit der Geraden einen Punkt gemein hat.

Anm. Die Sätze, welche den in dieser und den nächstfolgenden Nummern enthaltenen Sätzen nach dem Gesetze der Reciprocität gegenüberstehen, werden der Kürze wegen übergangen.

42. Durch eine Curve K II. Ordnung, dann zwei Ebenen U, V, welche die Curve in zwei verschiedenen Punkten A, B berühren, und zwei Punkte C, D, von welchen keiner in dem Träger der Curve liegt und welche auch nicht beide mit jenen Punkten in einer und derselben Ebene liegen, ist eine Fläche II. Ordnung bestimmt, welche den gegebenen Ebenen in den beiden erstern Punkten sich anschmiegt oder die gegebenen Ebenen berührt und überdiess durch die gegebene Curve und die beiden letztern Punkte geht.

Es werde der Träger der Curve von der Geraden CD im Punkte P geschnitten, dessen Polare in Hinsicht auf die Curve die Gerade p sei. Es sei ferner Q der Punkt, welcher vom Punkte P durch die Punkte C, D harmonisch getrennt ist, und S der Punkt, in welchem die Ebene Qp und die Gerade UV sich schneiden, so dass also die Ebene Sp entweder durch die beiden Punkte C, D geht oder diese Punkte durch den Punkt P und die Ebene Sp harmonisch getrennt sind. Wenn nun die Kegelfläche, welche aus dem Punkte S die Curve K projicirt, durch den einen von den beiden Punkten C, D geht, so geht sie auch durch den andern. Wenn aber diese Punkte ausserhalb der erwähnten Kegelfläche liegen, so gibt es (G. 232) eine Fläche II. Ordnung, welche die Kegelfläche in der Curve K berührt und überdiess durch den Punkt C, mithin auch, da in Hinsicht auf dieselbe die Ebene Sp die Polare des Punktes P ist, durch den Punkt D geht.

43. Durch zwei Curven K, K_1 II. Ordnung, welche nicht in einerlei Ebene liegen aber zwei Punkte A, B mit einander gemein haben, und einen Punkt C, welcher mit keiner von den beiden Curven in einerlei Ebene liegt, ist eine Fläche II. Ordnung be-

stimmt, welche durch die beiden gegebenen Curven und durch den gegebenen Punkt geht.

Es seien U, V die Ebenen, von welchen die eine im Punkte A und die andere im Punkte B die beiden Curven K, K_1 berührt. Legt man nun durch die Curve K, den Punkt C und einen ausserhalb der Geraden AB liegenden Punkt D der Kurve K_1 eine Fläche II. Ordnung, welche in den Punkten A, B den Ebenen U, V sich anschmiegt oder die Ebenen U, V berührt, so geht diese Fläche auch durch die Curve K_1. Denn die Fläche schneidet den Träger der Curve K_1 in einer Curve II. Ordnung, welche die Ebenen U, V in den Punkten A, B berührt und durch den Punkt D geht, folglich mit K_1 zusammenfällt.

Durch zwei Curven K, K_1 II. Ordnung, welche in zwei verschiedenen Ebenen liegen aber die Schnittlinie dieser Ebenen in einem und demselben Punkte berühren, und durch einen ausserhalb der beiden Ebenen liegenden Punkt C ist ebenfalls eine Fläche II. Ordnung bestimmt, welche durch die beiden gegebenen Curven und durch den gegebenen Punkt geht. Legt man nämlich durch den Punkt C eine Ebene, welche die Curven K, K_1 in vier Punkten schneidet, so ist durch diese Punkte und den Punkt C eine dritte Linie K_2 II. Ordnung bestimmt. Legt man nun durch die beiden Linien K, K_2 und irgend einen ausserhalb derselben liegenden Punkt der Curve K_1 eine Fläche II. Ordnung, so geht diese auch durch die Curve K_1.

44. Wenn eine Fläche F, welche mit der Ebene U nur den Punkt S gemein hat, von jeder andern durch diesen Punkt gehenden Ebene H in einer Curve II. Ordnung geschnitten wird, in der aber auch alle in der Ebene H liegenden Punkte der Fläche F enthalten sind, so ist diese Fläche eine Fläche II. Ordnung, welche die Ebene U im Punkte S berührt.

Es seien A, B, C drei Punkte, welche in der Fläche F aber mit dem Punkte S nicht in einerlei Ebene liegen, so schneiden die Ebenen SAB, SAC, SBC die Fläche F in drei Curven K, K_1, K_2 II. Ordnung, welche im Punkte S die Ebene U berühren, daher die Fläche F_1 II. Ordnung, welche durch zwei von diesen drei Curven und irgend einen ausserhalb derselben liegenden Punkt der dritten geht, auch durch die dritte geht. Es sei ferner D ir-

gend ein ausserhalb der Ebenen SAB, SAC, SBC liegender Punkt, so kann man durch diesen eine Ebene H legen, welche die Curven K, K_1, K_2 im Punkte S und in noch drei andern Punkten P, P_1, P_2 schneidet. Da nun die Ebene H die beiden Flächen F, F_1 in einer und derselben Curve II. Ordnung schneidet, welche nämlich durch die vier Punkte S, P, P_1, P_2 geht und im Punkte S die Ebene U berührt, so folgt, dass jeder Punkt D, welcher in irgend einer von den beiden Flächen F, F_1 liegt, auch in der andern liegt und dass also F mit F_1 identsich ist. Der obige Satz kann auch so ausgesprochen werden:

Wenn ein System F von Punkten mit dem ebenen Systeme U nur den Punkt S, mit jeder andern durch diesen Punkt gehenden Ebene aber eine Curve II. Ordnung und zwar nur die in der Curve liegenden Punkte gemein hat, so ist das System F nichts anderes als der Inbegriff von allen Punkten, welche in einer und derselben Fläche II. Ordnung, die im Punkte S die Ebene U berührt, enthalten sind. Eben so kann auch in den nächstfolgenden Sätzen F ein System von Punkten genannt werden, da in denselben mehr angenommen ist, als unter der Voraussetzung, dass F eine (zusammenhängende) Fläche sei, nothwendig wäre.

45. Wenn eine Fläche F, welche mit der Ebene U die Geraden a, p aber keinen ausserhalb dieser Geraden liegenden Punkt gemein hat, auch von jeder andern Ebene, welche durch a oder durch p geht, in noch einer Geraden, von jeder Ebene H aber, welche die Geraden a, p im Punkte a p schneidet, in einer Curve II. Ordnung geschnitten wird, die alle in der Ebene H befindlichen Punkte der Fläche F enthält, so ist diese Fläche eine Regelfläche.

Wie vorhin lässt sich eine Fläche F_1 II. Ordnung finden, so dass jeder ausserhalb der Ebene U liegende Punkt, welcher der einen von den beiden Flächen F, F_1 angehört, ein gemeinschaftlicher Punkt von beiden ist. Da hiernach auch jede Gerade, welche ausserhalb der Ebene U aber in der Fläche F liegt, beiden Flächen gemeinschaftlich ist, so ist F_1 eine Regelfläche und mit F identisch.

Wenn eine Fläche F, welche mit der Ebene U die Gerade p aber keinen ausserhalb dieser Geraden liegendon Punkt gemein hat, von jeder andern durch die Gerade p gehenden Ebene in noch einer Geraden und von jeder Ebene H, welche die Gerade p im Punkte

S schneidet, in einer Curve II. Ordnung geschnitten wird, welche alle in der Ebene H befindlichen Punkte der Fläche F enthält, so ist diese Fläche eine Kegelfläche II. Ordnung.

46. Durch zwei zu einander reciproke Strahlenbündel S, S_1, welche nicht einerlei Mittelpunkt haben, ist eine Fläche F II. Ordnung bestimmt, der nämlich jeder Punkt P angehört, welchen zwei homologe Elemente der zu einander projektivischen Grundgebilde (ein Strahl des einen und die ihm entsprechende Ebene des andern) mit einander gemein haben.

Liegt der Strahl S_1 P in der Ebene, welche dem Strahle S P entspricht, so liegt auch der Strahl S P in der Ebene, welche dem Strahle S_1 P entspricht. Geht eine Ebene, welche die beiden Strahlenbündel mit einander gemein haben, durch den ihr entsprechenden Strahl des einen, so geht sie auch durch den ihr entsprechenden Strahl des andern. Wenn nun der gemeinschaftliche Strahl der beiden Bündel S, S_1 als Strahl des erstern der Ebene U_1 des letztern und als Strahl des letztern der Ebene U des erstern entspricht, so hat man folgende Fälle zu unterscheiden:

Ist der Strahlenbüschel (S, U), welcher den Punkt S zum Mittelpunkt hat und in der Ebene U liegt, ein Schnitt des ihm entsprechenden Ebenenbüschels, so besteht die Fläche F aus den beiden Ebenen U, U_1. — Liegen nur zwei Strahlen a, p des Büschels (S, U) in den ihnen entsprechenden Ebenen, so ist die Fläche F eine Regelfläche, welche die Ebene U in den Geraden a, p schneidet. — Liegt nur ein Strahl p des Büschels (S, U) in der ihm entsprechenden Ebene, so ist die Fläche F eine Kegelfläche, welche der Ebene U in der Geraden p sich anschmiegt. — Liegt kein Strahl des Büschels (S, U) in der ihm entsprechenden Ebene, so hat die Fläche F mit der Ebene U nur den Punkt S, mit jeder andern durch diesen Punkt gehenden Ebene H aber eine Curve II. Ordnung gemein, welche nämlich der Strahlenbüschel (S, H) mit dem ihm entsprechenden Ebenenbüschel erzeugt.

---

§. 3.

Vom Sinne der Gebilde.

47. Durch drei Elemente A, B, C eines geschlossenen Gebil-

des, welches aus einer stetigen Aufeinanderfolge von Pnnkten oder Geraden oder Ebenen besteht, ist ein Stück ABC desselben bestimmt, welches von dem Elemente A ausgeht, das Element B in sich enthält und in dem Eiemente C sich endigt. Wird das ganze Gebilde durch ABC bezeichnet, so kann dadurch zugleich der Sinn angedeutet sein, in welchem man dasselbe beschrieben sich denkt, und welcher, auch wenn die Elemente A, B, C in dem Gebilde sich bewegen, so lange keine zwei derselben in einander fallen, unverändert derselbe bleibt. Der Sinn ABC kann auch durch BCA oder CAB, der demselben entgegengesetzte Sinn CBA auch durch BAC oder ACB bezeichnet werden; auch ist es ganz einerlei, ob man sagt, dass die Gebilde ABC, PQR in einem und demselben Sinne, oder dass die Gebilde ABC, RQP in entgegengesetztem Sinne beschrieben seien.

Sind zwei Elementargebilde zu einander projektivisch, so entspricht jedem Sinne ABC in dem einen ein Sinn $A_1 B_1 C_1$ im andern, so dass, wenn man das eine Gebilde im Sinne ABC beschrieben sich denkt, man alsdann das andere im Sinne $A_1 B_1 C_1$ beschrieben sich zu denken hat. Liegen die Gebilde in einander, so sind sie in einem und demselben oder in entgegengesetztem Sinne beschrieben, je nachdem der Sinn $A_1 B_1 C_1$ mit dem Sinne ABC oder mit dem Sinne CBA übereinstimmt.

48. Ein gerades Gebilde ABC und ein Ebenenbüschel PQR, dessen Axe s mit dem Träger u des geraden Gebildes keinen Punkt gemein hat, sollen in einem und demselben Sinne beschrieben heissen, wenn in dem geraden Gebilde der Sinn u(PQR) mit dem Sinne ABC und also in dem Ebenenbüschel der Sinn s(ABC) mit dem Sinne PQR übereinstimmt.

Ein Strahlenbüschel pqr und ein gerades Gebilde ABC, welches mit dem Büschel in einerlei Ebene liegt aber nicht durch seinen Mittelpunkt S geht, sollen in einem und demselben Sinne beschrieben heissen, wenn der Sinn S(ABC) mit dem Sinne pqr übereinstimmt.

Ein Strahlenbüschel pqr und ein Ebenenbüschel ABC, dessen Axe die Ebene U des Strahlenbüschels im Mittelpunkte desselben schneidet, sollen in einem und demselben Sinne beschrieben heissen, wenn der Sinn U(ABC) mit dem Sinne pqr übereinstimmt.

Anm. Wird von dem Mittelpunkte eines Strahlenbüschels oder der Axe eines Ebenenbüschels gesprochen, so ist dadurch von selbst angedeutet, dass der Büschel ein Büschel I. Ordnung ist.

49. Zwei in einerlei Ebene liegende gerade Gebilde ABC, PQR sollen in Hinsicht auf einen Punkt S, welcher in der nämlichen Ebene aber in keiner von den beiden Geraden liegt, in einem und demselben Sinne beschrieben heissen, wenn der Sinn S(ABC) mit dem Sinne S(PQR) übereinstimmt.

Zwei Strahlenbüschel abc, pqr, welche einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben, sollen in Hinsicht auf eine Gerade s, welche durch diesen Punkt geht aber keinem der Büschel angehört, in einem und demselben Sinne beschrieben heissen, wenn der Sinn s(abc) mit dem Sinne s(pqr) übereinstimmt.

50. Zwei Seiten AB, BC eines Dreiecks, deren gemeinschaftlicher Grenzpunkt als Endpunkt der einen und als Anfangspunkt der andern betrachtet wird, sind (47) in Hinsicht auf einen Punkt S, welcher in der nämlichen Ebene aber mit keiner von den beiden Seiten in einer und derselben Geraden liegt, in einem und demselben oder in entgegengesetztem Sinne beschrieben, je nachdem die Gerads SB, welche diesen Punkt mit jenem Eck-

Zwei in einerlei Ebene liegende Strahlenbüschel abc, pqr sollen in Hinsicht auf eine Gerade u, welche in der nämlichen Ebene liegt aber von keinem der Büschel den Mittelpunkt enthält, in einem und demselben Sinne beschrieben heissen, wenn der Sinn u(abc) mit dem Sinne u(pqr) übereinstimmt.

Zwei Ebenenbüschel ABC, PQR, deren Axen einen Punkt mit einander gemein haben, sollen in Hinsicht auf eine Ebene U, welche durch diesen Punkt geht aber keinem der Büschel angehört, in einem und demselben Sinne beschrieben heissen, wenn der Sinn U(ABC) mit dem Sinne U(PQR) übereinstimmt.

Zwei Winkel eines Dreiecks, deren gemeinschaftlicher Schenkel als Endschenkel des einen und als Anfangsschenkel des andern betrachtet wird, sind in Hinsicht auf eine Gerade, welche in der nämlichen Ebene liegt aber von keinem der Winkel den Mittelpunkt enthält, in einem und demselben oder in entgegengesetztem Sinne beschrieben, je nachdem diese Gerade diejenige Seite des Dreiecks, welche in dem gemeinschaftlichen Schen-

punkte des Dreiecks verbindet, den Umfang desselben schneidet oder berührt.

Zwei Seiten eines Dreikants, deren gemeinschaftlicher Schenkel als Endschenkel der einen und als Anfangsschenkel der andern betrachtet wird, sind in Hinsicht auf eine Gerade, welche durch den Mittelpunkt des Dreikants geht aber mit keiner von den beiden Seiten in einerlei Ebene liegt, in einem und demselben oder in entgegengesetztem Sinne beschrieben, je nachdem die durch diese Gerade und jene Kante des Dreikants gehende Ebene den Mantel desselben schneidet oder nicht schneidet.

51. Zwei sich schneidende gerade Gebilde A B C, P Q R sind in Hinsicht auf einen Punkt S, welcher in keiner der Geraden aber mit beiden in einerlei Ebene liegt, in einem und demselben oder in entgegengesetztem Sinne beschrieben, je nachdem (50) dieser Punkt in dem einen oder in dem andern von den beiden Winkeln liegt, welche die Geraden mit einander bilden.

Zwei Strahlenbüschel a b c, p q r, welche einerlei Mittelpunkt haben aber nicht in einerlei Ebene liegen, sind in Hinsicht auf eine Gerade, welche durch den Mittelpunkt geht, aber in keiner der beiden Ebenen liegt, in einem und demselben oder in entgegengesetztem Sinne beschrieben, je nachdem diese Gerade in dem einen oder in dem andern von den beiden Winkeln liegt, welche die Ebenen mit einander bilden.

kel der beiden Winkel liegt, nicht schneidet oder schneidet.

Zwei Winkel eines Dreikants, deren gemeinschaftlicher Schenkel als Endschenkel des einen und als Anfangsschenkel des andern betrachtet wird, sind in Hinsicht auf eine Ebene, welche durch den Mittelpunkt des Dreikants aber weder durch die Axe des einen noch durch die Axe des andern Winkels geht, in einem und demselben oder in entgegengesetztem Sinne beschrieben, je nachdem diese Ebene diejenige Seite des Dreikants, welche in dem gemeinschaftlichen Schenkel der beiden Winkel liegt, nicht schneidet oder schneidet.

Zwei Strahlenbüschel a b c, p q r, welche in einerlei Ebene liegen, aber nicht einerlei Mittelpunkt haben, sind in Hinsicht auf eine Gerade, welche der nämlichen Ebene aber keinem der Büschel angehört, in einem und demselben oder in entgegengesetztem Sinne beschrieben, je nachdem diese Gerade die eine oder die andere von den beiden Strecken schneidet, welche die Mittelpunkte der Büschel mit einander verbinden.

Zwei Ebenenbüschel A B C, P Q R, deren Axen sich schneiden, sind in Hinsicht auf eine

gen, sind in Hinsicht auf eine Gerade, welche durch jenen Punkt geht aber keinem der Büschel angehört, in einem und demselben oder in entgegengesetztem Sinne beschrieben, je nachdem die Gerade in dem einen oder in dem andern von den beiden Winkeln liegt, welche die Träger der Büschel mit einander bilden.

52. Zwei gerade Gebilde ABC, PQR sollen in Hinsicht auf eine Gerade s, welche weder mit dem einen noch mit dem andern Gebilde in einerlei Ebene liegt, in einem und demselben Sinne beschrieben heissen, wenn der Sinn s(ABC) mit dem Sinne s(PQR) übereinstimmt.

Sind also zwei gerade Gebilde, welche in einerlei Ebene liegen, in Hinsicht auf einen Punkt dieser Ebene in einem und demselben Sinne beschrieben, so sind sie es auch in Hinsicht auf jede Gerade, welche die Ebene in jenem Punkte schneidet.

Ebene, welche keinem der Büschel angehört aber durch den Schnittpunkt ihrer Axen geht, in einem und demselben oder in entgegengesetztem Sinne beschrieben, je nachdem die Ebene den einen oder den andern von den beiden Winkeln schneidet, welche die Axen der Büschel mit einander bilden.

Zwei Ebenenbüschel ABC, PQR sollen in Hinsicht auf eine Gerade u, welche weder mit der Axe des einen noch mit der Axe des andern Büschels in einerlei Ebene liegt, in einem und demselben Sinne beschrieben heissen, wenn der Sinn u(ABC) mit dem Sinne u(PQR) übereinstimmt.

Sind zwei Ebenenbüschel, deren Axen sich schneiden, in Hinsicht auf eine durch den Schnittpunkt gehende Ebene in einem und demselben Sinne beschrieben, so sind sie es auch in Hinsicht auf jede in dieser Ebene liegende aber nicht durch jenen Punkt gehende Gerade.

53. Zwei Winkel $D\overline{AB}C$, $A\overline{BC}D$ eines Tetraeders ABCD, welche einen Schenkel ABC, der als Endschenkel des einen und als Anfangsschenkel des andern betrachtet wird, mit einander gemein haben, sind in Hinsicht auf eine Gerade s, welche weder mit der Axe des einen noch mit der Axe des andern Winkels einen Punkt gemein hat, in entgegengesetztem oder in einem und demselben Sinne beschrieben, je nachdem die in den Axen der Winkel liegenden Kanten AB, BC des Tetraeders, deren gemeinschaftlicher Grenzpunkt als Endpunkt der einen und als Anfangspunkt der an-

dern zu betrachten ist, in Hinsicht auf jene Gerade in einem und demselben oder in entgegengesetztem Sinne beschrieben sind.

Denn der ebene Winkel, welcher aus dem Punkte B die Kante AC des Tetraeders projicirt, wird von der Ebene sB geschnitten oder nicht geschnitten, je nachdem diese Ebene die gebrochene Linie ABC im Punkte B schneidet oder berührt. Der erwähnte ebene Winkel ist aber diejenige Seite des durch die Flächenwinkel $D\overline{AB}C$, $AB\overline{C}D$ bestimmen Dreikants, welche in dem gemeinschaftlichen Schenkel derselben liegt.

54. Wenn zwei gerade Gebilde ABC, EFG, deren Träger p, q nicht in einerlei Ebene liegen, in Hinsicht auf eine dritte Gerade r in einem und demselben Sinne beschrieben sind, so sind in Hinsicht auf diese Gerade auch die Ebenenbüschel q(ABC), p(EFG), welche die geraden Gebilde, jedes aus dem Träger des andern, projiciren, in einem und demselben Sinne beschrieben.

Es seien a, b, c diejenigen Leitstrahlen der Regelschaar pqr, welche beziehlich durch die Punkte A, B, C gehen, so stimmt nach der Annahme in dem Ebenenbüschel r der Sinn r(abc) mit dem Sinne r(EFG), demnach in dem geraden Gebilde q der Sinn q(abc) mit dem Sinne EFG und mithin in dem Ebenenbüschel p der Sinn p(abc) mit dem Sinne p(EFG) überein, woraus, da die Ebenenbüschel p(abc), q(abc) in Hinsicht auf die Gerade r in einem und demselben Sinne beschrieben sind, der Satz folgt.

Anm. Will man das gerade Gebilde p(abc) von dem Ebeuenbüschel p(abc) durch Zeichen unterscheiden, so kann man das erstere Gebilde durch $\dot{p}$(abc) und das letztere durch $\bar{p}$(abc) bezeichnen.

55. Wenn zwei gerade Gebilde ABC, EFG, deren Träger p, q nicht in einerlei Ebene liegen, und mithin auch die Ebenenbüschel q(ABC), p(EFG) in Hinsicht auf eine dritte Gerade r in einem und demselben Sinne beschrieben sind, so sind sie nicht nur in Hinsicht auf jede vierte Gerade der Regelschaar pqr, sondern auch in Hinsicht auf jede Gerade, welche mit der Regelfläche gar keinen Punkt gemein hat oder dieselbe in einem ausserhalb der Geraden p, q liegenden Punkte berührt, in einem und demselben Sinne, in Hinsicht auf eine Gerade aber, welche die Regelfläche in zwei ausserhalb der Geraden p, q liegenden Punkten schneidet, in einem und demselben oder in entgegengesetztem Sinne be-

schrieben, je nachdem diese Punkte in der Fläche durch die Geraden p, q nicht getrennt oder getrennt sind.

Es seien a, b, c diejenigen Leitstrahlen der Regelschaar pqr, welche beziehlich durch die Punkte A, B, C gehen, so stimmt in dem geraden Gebilde q der Sinn EFG mit dem Sinne q(abc) überein. Es sei ferner s irgend eine Gerade, welche mit keiner von den Geraden p, q in einerlei Ebene liegt, so werden die zur Regelschaar abc... perspektivischen und also auch unter sich projektivischen geraden Gebilde p(abc...), q(abc...) aus der Axe s durch zwei zu einander projektivische Ebenenbüschel projicirt, welche nur dann in entgegengesetztem Sinne beschrieben sind, wenn sie zwei Ebenen sm, sn entsprechend gemein haben, welche durch je zwei einander entsprechende Ebenen getrennt sind. Diess ist aber nur der Fall, wenn die Gerade s zwei Gerade der Regelschaar abc und also auch zwei Gerade m, n der Regelschaar pqr schneidet und überdiess in der Regelfläche die Geraden m, n, mithin auch die Punkte sm, sn durch die Geraden p, q getrennt sind.

56. Durch zwei Gerade p, q, welche als Träger von zwei geraden Gebilden ABC, EFG (oder auch als Axen von zwei Ebenenbüscheln ABC, EFG) betrachtet werden, wird das System von allen Geraden, welche keine der gegebenen Geraden schneiden, in zwei Systeme getheilt, so dass nämlich eine Gerade r, welche weder mit der Geraden p noch mit der Geraden q einen Punkt gemein hat, dem einen oder dem andern dieser beiden Systeme angehört, je nachdem in Hinsicht auf dieselbe die Gebilde ABC, EFG in einem und demselben oder in entgegengesetztem Sinne beschrieben sind, was, im Falle die Geraden p, q in einerlei Ebene liegen und also zwei Winkel mit einander bilden, nur davon abhängt, welchen von diesen beiden Winkeln die Gerade r schneidet. Liegen aber die Geraden p, q nicht in einerlei Ebene, so ist durch sie und jede Gerade r des einen (gleichviel welchen) Systems eine Regelfläche pqr bestimmt, welche (55) von jeder Geraden des andern Systems in zwei Punkten geschnitten wird, die in der Fläche durch die Geraden p, q getrennt sind, woraus hervorgeht, dass auch in diesem Falle eine sich bewegende Gerade nicht von dem einen Systeme in das andere übergehen kann, ohne während ihrer Bewegung wenigstens einmal mit einer Geraden zusammenzufallen, welche der ge-

meinschaftlichen Grenze der beiden Systeme angehört, nämlich die eine oder die andere der gegebenen Geraden oder auch beide schneidet. Zwei Gerade, welche einem und demselben von den beiden Systemen angehören, sind im Raume, wie man sich leicht überzeugt, durch die Geraden p, q nicht getrennt.

57. Wenn im Raume zwei Gerade r, s durch zwei andere Gerade p, q getrennt sind, so sind auch die beiden letztern durch die beiden erstern getrennt.

Man kann nämlich (56) die Geraden p, q als Träger von zwei geraden Gebilden ABC, EFG betrachten, welche in Hinsicht auf die Gerade r in einem und demselben Sinne, in Hinsicht auf die Gerade s aber in entgegengesetztem Sinne beschrieben sind. Da nun die Ebenenbüschel r(ABC), s(ABC) in Hinsicht auf die Gerade p in einem und demselben Sinne, in Hinsicht auf die Gerade q aber in entgegengesetztem Sinne beschrieben sind, so sind auch die Geraden p, q durch die Geraden r, s getrennt. Der Satz kann übrigens auch so bewiesen werden:

Die Geraden r, s sind durch die Geraden p, q und eben so diese durch jene getrennt, wenn es (56) zwei Gerade f, g giebt, welche die vier Geraden p, q, r, s schneiden, so dass die Punkte fp, fq durch die Punkte fr, fs getrennt, hingegen die Punkte gp, gq durch die Punkte gr, gs nicht getrennt sind.

58. Eine Curve ABC II. Ordnung und ein in derselben Ebene befindlicher Strahlenbüschel pqr, dessen Mittelpunkt S entweder in der Curve liegt oder von ihr eingeschlossen ist, sollen in einem und demselben Sinne beschrieben heissen, wenn, während ein Punkt T in der Curve im Sinne ABC sich bewegt, der ihn projicirende Strahl ST des Büschels um den Punkt S im Sinne pqr sich dreht.

Ein Strahlenbüschel abc II. Ordnung und ein gerades Gebilde PQR, dessen Träger s entweder ein Strahl des Büschels ist oder in jedem seiner Punkte von zwei Strahlen desselben geschnitten wird, sollen in einem und demselben Sinne beschrieben heissen, wenn, während im Büschel ein Strahl t im Sinne abc sich bewegt, seine Spur st in der Geraden s im Sinne PQR sich bewegt.

In dieser und den nächstfolgenden Nummern kann jede Linie, welche eine ebene Figur einschliesst und von keiner Geraden in

mehr als zwei Punkten geschnitten wird, die Stelle einer Curve II. Ordnung und der die Figur umhüllende Strahlenbüschel die Stelle eines Strahlenbüschels II. Ordnung vertreten. — Werden zwei in einerlei Ebene liegende Gebilde ABC, pqr, welche in einem und demselben Sinne beschrieben sind, aus einem ausserhalb der Ebene befindlichen Punkte M projicirt, so hat man vier Gebilde ABC, pqr, M(ABC), M(pqr), welche sämmtlich in einem und demselben Sinne beschrieben sind.

59. Wenn ein Punkt T und eine durch ihn gehende Gerade t eine Curve II. Ordnung und den derselben sich anschmiegenden Strahlenbüschel beschreiben, so sind die Curve und der Strahlenbüschel in einem und demselben Sinne beschrieben. Jedes dritte Gebilde, welches im Sinne des einen von den beiden erstern beschrieben ist, soll auch im Sinne des andern beschrieben heissen. Es können hiernach auch ein gerades Gebilde und eine Curve II. Ordnung (oder auch ein Strahlenbüschel erster und ein Strahlenbüschel zweiter Ordnung), welche in einerlei Ebene liegen aber höchstens ein Element mit einander gemein haben, in einem und demselben Sinne beschrieben sein.

Vertritt im Obigen der Umfang einer geradlinigen Figur die Stelle der Curve II. Ordnung, so ruht die Gerade t, während der Punkt T eine Seite beschreibt, der Punkt T aber, während die Gerade t einen Aussenwinkel beschreibt.

60. Zwei Gebilde ABC, EFG sollen in Hinsicht auf ein drittes Gebilde, welches nur an sich gegeben ist, in einem und demselben Sinne beschrieben heissen, wenn das dritte Gebilde im Sinne ABC beschrieben werden kann und alsdann auch im Sinne EFG beschrieben ist. Wird von zwei in einerlei Ebene liegenden Gebilden ABC, EFG gesagt, dass sie in Hinsicht auf eine Gerade s in einem und demselben Sinne beschrieben sind, so versteht es sich von selbst, dass die Gebilde ABC, EFG in Hinsicht auf das gerade Gebilde s oder in Hinsicht auf den Ebenenbüschel s in einem und demselben Sinne beschrieben sind, je nachdem die Gerade s in jener Ebene oder ausserhalb derselben liegt. Wäre es aber zweifelhaft, ob die Gerade s als Träger von Punkten oder als Schnittlinie von Ebenen zu betrachten sei, so müsste solches ausdrücklich bemerkt werden.

Sagt man von zwei in einerlei Ebene liegenden Winkeln, welche nicht einerlei Mittelpunkt haben, dass sie in einem und demselben Sinne beschrieben sind, ohne ein drittes Gebilde anzugeben, welches dabei in Betrachtung zu ziehen ist, so heisst diess nichts anderes als dass die beiden Winkel in Hinsicht auf die unendlich ferne Gerade der Ebene in einem und demselben Sinne beschrieben sind.

61. Wenn ein Strahlenbüschel pqr und ein gerades Gebilde EFG, dessen Träger s mit dem Büschel in einerlei Ebene liegt aber nicht durch seinen Mittelpunkt S geht, in Hinsicht auf eine in der nämlichen Ebene liegende Curve K II. Ordnung in einem und demselben Sinne beschrieben sind, so sind sie auch abgesehen von der Curve in einem und demselben Sinne beschrieben.

Nach der Annahme können ein Punkt T und eine durch ihn gehende Gerade t die Curve K und den derselben sich anschmiegnnden Strahlenbüschel so beschreiben, dass die Gerade ST um den Punkt S im Siune pqr sich dreht und der Punkt st in der Geraden s im Sinne EFG sich bewegt. Fällt nun während dieser Bewegung der Punkt st höchstens einmal in die Gerade ST, so kann man schon daraus schliessen, dass die Gebilde pqr, EFG in einem und demselben Sinne beschrieben sind. Wenn aber der Punkt S in der Curve K liegt und die Gerade s die Curve in einem Punkte F berührt, so nehme man in der Gerade SF einen Punkt S_1 an, welcher von der Curve eingeschlossen ist. Da nun, wenn der Punkt T im vorigen Sinne die Kurve K beschreibt, nach dem bereits betrachteten Falle die Gerade S_1T um den Punkt S_1 im Sinne S_1 (EFG) sich dreht und die Geraden S_1T, ST sowie auch die Punkte, in welchen sie die Gerade s schneiden, nur einmal in einander fallen, so muss auch die Gerade ST um den Punkt S im Sinne S(EFG) sich drehen. Von andern hiemit zusammenhängenden Sätzen soll nur folgender angeführt werden.

Sind zwei Curven II. Ordnung in Hinsicht auf eine Gerade, welche mit beiden in einerlei Ebene liegt, in einem und demselben Sinne beschrieben, so sind sie in Hinsicht auf eine andere in dieser Ebene liegende Gerade, welche ebenfalls keine von den beiden Curven schneidet, in einem und demselben oder in entgegengesetztem Sinne beschrieben, je nachdem die Geraden durch die Curven nicht getrennt oder getrennt sind.

62. Eine Regelschaar abc und ein gerades Gebilde EFG, dessen Träger s entweder ein Leitstrahl der Regelschaar ist oder mit der Regelfläche nur einen oder gar keinen Punkt gemein hat, sollen in einem und demselben Sinne beschrieben heissen, wenn diess von dem geraden Gebilde und irgend einem, also jedem, zur Regelschaar perspektivischen Ebenenbüschel gilt, dessen Axe mit dem geraden Gebilde nicht in einerlei Ebene liegt.

Eine Regelschaar und ein Ebenenbüschel, dessen Axe entweder ein Leitstrahl der Regelschaar ist oder mit der Regelfläche nur einen oder gar keinen Punkt gemein hat, sollen in einem und demselben Sinne beschrieben heissen, wenn diess von dem Ebenenbüschel und irgend einem, also jedem, zur Regelschaar perspektivischen geraden Gebilde gilt, welches mit der Axe des Ebenenbüschels nicht in einerlei Ebene liegt.

Es seien p, q, r drei Leitstrahlen der Regelschaar abc, von welchen keiner mit der Geraden s einen Punkt gemein hat, so sind die Ebenenbüschel p(abc), q(abc) in Hinsicht auf die Gerade r und mithin (55) auch in Hinsicht auf die Gerade s in einem und demselben Sinne beschrieben, woraus hervorgeht, dass das gerade Gebilde EFG und der Ebenenbüschel q(abc) in einem und denselben Sinne beschrieben sind, wenn diess von dem geraden Gebilde EFG und dem Ebenenbüschel p(abc) gilt.

63. Wenn eine Regelschaar abc und ein gerades Gebilde EFG, welches ausserhalb der Regelfläche liegt, in einem und demselben Sinne beschrieben sind, so gilt diess auch von dem geraden Gebilde und jeder zur Regelschaar perspektivischen Curve U(abc) II. Ordnung, welche mit dem geraden Gebilde in einerlei Ebene U liegt.

Wenn eine Regelschaar und ein Ebenenbüschel, dessen Axe ausserhalb der Regelfläche liegt, in einem und demselben Sinne beschrieben sind, so gilt diess auch von diesem Ebenenbüschel erster und jedem zur Regelschaar perspektivischen Ebenenbüschel zweiter Ordnung, dessen Mittelpunkt in der Axe des erstern Büschels liegt.

Es sei p ein Leitstrahl der Regelschaar abc, welcher die Gerade EF nicht schneidet. Da nun das gerade Gebilde EFG und die Curve U(abc) in Hinsicht auf den Ebenenbüschel p in einem und demselben Sinne p(abc) beschrieben sind, so sind sie, wie

aus 61 leicht hervorgeht, auch abgesehen von dem Ebenenbüschel in einem und demselben Sinne beschrieben.

64. Sind zwei zusammengehörige Regelschaaren a b c, p q r, von welchen nämlich jede die Leitschaar der andern ist, in Hinsicht auf eine Gerade s als Träger von Punkten in einem und demselben Sinne beschrieben, so sind sie in Hinsicht auf die nämliche Gerade als Schnittlinie von Ebenen in entgegengesetztem Sinne beschrieben.

Man kann annehmen, dass die Gerade s weder mit der Geraden c noch mit der Geraden p in einerlei Ebene liege. Da nun die Strecken p (a b c), c (p q r), r (c b a), a (r q p), welche sämmtlich von der Ebene b q geschnitten werden, vier Kanten eines Tetreanders sind, und da die Winkel p (a b c), c (p q r) in Hinsicht auf das gerade Gebilde s in einem und demsèlben Sinne sind, so sind (53) die Strecken p (a b c), c (p q r) in Hinsicht auf den Ebenenbüschel s in entgegengesetztem Sinne beschrieben, woraus der Satz folgt. Die Regelschaaren a b c, r q p sind in Hinsicht auf das gerade Gebilde s in entgegengesetztem Sinne, hingegen in Hinsicht auf den Ebenbüschel s in einem und demselben Sinne beschrieben.

65. Zwei zusammengehörige Regelschaaren a b c, p q r sollen in Hinsicht auf

eine der Regelfläche sich nicht anschmiegende Ebene U in einem und demselben Sinne beschrieben heissen, wenn in der Curve, in welcher die Ebene U und die Regelfläche sich schneiden, der Sinn U (a b c) mit dem Sinne U (p q r) übereinstimmt und mithin (63)) die Regelschaaren in Hinsicht auf jedes gerade Gebilde, welches in der Ebene U liegt aber die Regelfläche nicht schneidet, in einem und demselben Sinne beschrieben sind.

einem ausserhalb der Regelfläche liegenden Punkt S in einem und demselben Sinne beschrieben heissen, wenn in dem der Regelfläche sich anschmiegenden Ebenenbüschel, welcher den Punkt S zum Mittelpunt hat, der Sinn S (a b c) mit dem Sinne S (p q r) übereinstimmt und mithin die Regelschaaren in Hinsicht auf jeden Ebenenbüschel I. Ordnung, dessen Axe durch den Punkt S geht aber die Regelfläche nicht schneidet, in einem und demselben Sinne beschrieben sind.

Sind zwei zusammengehörige Regelschaaren in Hinsicht auf

eine Gerade als Träger von Punkten in einem und demselben Sinne und also in Hinsicht auf dieselbe Gerade als Schnittlinie von Ebenen in entgegengesetztem Sinne beschrieben, so sind sie nach dem Obigen auch in Hinsicht auf jede durch die Gerade gehende der Regelfläche sich nicht anschmiegende Ebene in einem und demselben Sinne und in Hinsicht auf jeden ausserhalb der Regelfläche liegenden Punkt der Geraden in entgegengesetztem Sinne beschrieben.

66. Sind zwei zusammengehörige Regelschaaren a b c, p q r in Hinsicht auf

eine Ebene U in einem und demselben Sinne beschrieben, so sind sie in Hinsicht auf einen ausserhalb der Regelfläche liegenden Punkt S der Ebene in einem und demselben oder in entgegengesetztem Sinne beschrieben, je nachdem dieser Punkt von der Curve K, in welcher die Regelfläche und die Ebene sich schneiden, eingeschlossen oder nicht eingeschlossen ist.

einen Punkt in einem und demselben Sinne beschrieben, so sind sie in Hinsicht auf eine durch ihn gehende der Regelfläche sich nicht anschmiegende Ebene in einem und demselben oder in entgegengesetztem Sinne beschrieben, je nachdem die Curve, in welcher diese Ebene die Regelfläche schneidet, jenen Punkt einschliesst oder nicht einschliesst.

Man kann annehmen, dass die Punkte U a, U c mit dem Punkte S in einer und derselben Geraden liegen, und dass die Geraden p, q, r die Ebene U beziehlich in den Punkten U a, U b, U c schneiden. Es sei ferner d diejenige Gerade der Regelschaar a b c, welche in der Ebene S q liegt, so liegen auch die Punkte U b, U d mit dem Punkte S in einer und derselben Geraden. Da nun die Ebenen S p, S q, S r beziehlich mit dem Ebenen S c, S d, S a zusammenfallen, so ist nur zu beweisen, dass in dem der Regelfläche sich anschmiegenden Ebenenbüschel S der Sinn S (a b c) mit dem Sinne S (c d a) oder mit dem Sinne S (a d c) übereinstimmt, je nachdem der Punkt S von der Curve K eingeschlossen oder nicht eingeschlossen ist. Es geht diess aber daraus hervor, weil im erstern Falle in der Curve K die Punkte U a, U c durch die Punkte U b, U d, demnach in der Regelschaar a b c die Geraden a, c durch die Geraden b, d und mithin in dem Ebenenbüschel S die Ebenen S a, S c durch die Ebenen S b, S d getrennt, im letztern

Falle aber nicht getrennt sind. Bemerkt wird noch, dass die Ebene U und die dem Ebenbüschel S sich anschmiegende Kegelfläche im erstern Falle keine Gerade mit einander gemein haben, im letztern aber in zwei Geraden sich schneiden.

67. Sind zwei zusammengehörige Regelschaaren a b c, p q r in Hinsicht auf

den einen von zwei ausserhalb der Regelfläche liegenden Punkten in einem und demselben Sinne beschrieben, so sind sie (66) in Hinsicht auf den andern in einem und demselben oder in entgegengesetztem Sinne beschrieben, je nachdem die Punkte durch die Regelfläche nicht getrennt oder getrennt sind. Das letztere ist nur der Fall, wenn jede von den beiden Strecken, welche die Punkte mit einander verbinden, von der Regelfläche geschnitten wird.

die eine von zwei der Regelfläche sich nicht anschmiegenden Ebenen in einem und demselben Sinne beschrieben, so sind sie in Hinsicht auf die andere in einem und demselben oder in entgegengesetztem Sinne beschrieben, je nachdem die Ebenen durch den der Regelfläche sich anschmiegenden Ebenenbündel nicht getrennt oder getrennt sind. Das letztere ist nur der Fall, wenn jeder von den beiden Winkeln, welche die Ebenen mit einander bilden, eine der Regelfläche sich anschmiegende Ebene enthält.

Wenn daher eine Gerade s die Regelfläche in zwei Punkten A, B schneidet und also auch die Schnittlinie von zwei der Regelfläche sich anschmiegenden Ebenen P, Q ist, so wird der Ebenenbüschel s durch diese Ebenen in zwei Winkel P Q, P·Q und das gerade Gebilde s durch jene Punkte in zwei Strecken A B, A·B getheilt, so dass die Regelschaaren a b c, p q r in Hinsicht auf jede Ebene des Winkels P Q und jeden Punkt der Strecke A B in einem und demselben Sinne, hingegen in Hinsicht auf jede Ebene des Winkels P·Q und jeden Punkt der Strecke A·B in entgegengesetztem Sinne beschrieben sind. Jede durch die Gerade s gehende der Regelfläcche sich nicht anschmiegende Ebene schneidet dieselbe in einer Curve II. Ordnung, welche die Strecke A B oder A·B einschliesst, je nachdem die Ebene dem Winkel P Q oder P·Q angehört. Jeder ausserhalb der Regelfläche liegende Punkt der Geraden

s ist der Mittelpunkt einer Kegelfläche, welche die Regelfläche in einer Curve II. Ordnung berührt und in den Winkel P Q oder P·Q beschrieben ist, je nachdem ihr Mittelpunkt in der Strecke A·B oder A B liegt.

68. Sind zwei zusammengehörige Regelschaaren a b c, p q r in Hinsicht auf eine Gerade s in einem und demselben Sinne beschrieben, so sind sie in Hinsicht auf eine andere Gerade u, welche ebenfalls mit der Regelfläche höchstens einen Punkt gemein hat, in einem und demselben oder in entgegengesetztem Sinne beschrieben, je nachdem die Geraden auf einerlei oder entgegengesetzten Seiten der Regelfläche liegen, vorausgesetzt, dass entweder beide Gerade als Schnittlinien von Ebenen oder beide als Träger von Punkten betrachtet werden.

Man nehme an, dass die Regelschaaren a b c, p q r in Hinsicht auf den Ebenenbüschel s und also auch (65) in Hinsicht auf jeden ausserhalb der Regelfläche liegenden Punkt der Geraden s in einem und demselben Sinne beschrieben sind, so sind sie in Hinsicht auf den Ebenenbüschel u und jeden ausserhalb der Regelfläche liegenden Punkt der Geraden u in einem und demselben oder in entgegengesetztem Sinne beschrieben, je nachdem (67) die Geraden s, u durch die Regelfläche nicht getrennt oder getrennt sind. Die Regelschaaren a b c, r p q, welche (64) in Hinsicht auf das gerade Gebilde s und jede durch die Gerade s gehende der Regelfläche sich nicht anschmiegende Ebene in einem und demselben Sinne beschrieben sind, sind in Hinsicht auf das gerade Gebilde u und jede durch diese Gerade gehende der Regelfläche sich nicht anschmiegende Ebene im erstern Falle in einem und demselben Sinne, im letztern aber in entgegengesetztem Sinne beschrieben, daher in letzterm Falle auch je zwei der Regelfläche sich nicht anschmiegende Ebenen, von welchen die eine durch die Gerade s und die andere durch die Gerade u geht, durch den der Regelfläche sich anschmiegenden Ebenenbündel getrennt sind.

69. Wenn die Geraden a, b, c, a_1, b_1, c_1 einer und derselben Regelschaar angehören, von welcher die Geraden p, q, r, p_1, q_1, r_1 Leitstrahlen sind, und man bezieht zwei räumliche System projektivisch so auf einander, dass den Geraden a, b, c, p, q, r des einen Systems die Geraden a_1, b_1, c_1, p_1, q_1, r_1 des andern

entsprechen, so entspricht jeder Geraden s des erstern Systems, welche mit der Regelfläche höchstens einen Punkt gemein hat, eine Gerade s_1 des letztern, welche ebenfalls mit der Regelfläche höchstens einen Punkt gemein hat, so dass, wenn die Regelschaaren abc, pqr in Hinsicht auf das Gebilde s in einem und demselben Sinne beschrieben sind, die Regelschaaren $a_1\,b_1\,c_1$, $p_1\,q_1\,r_1$ in Hinsicht auf das gerade Gebilde s_1 oder in Hinsicht auf den Ebenenbüschel s_1 in einem und demselben Sinne beschrieben sind, je nachdem die Systeme collineär oder reciprok zu einander sind. Wenn also die Systeme collineär zu einander sind und überdiess entweder der Sinn abc mit dem Sinne $a_1\,b_1\,c_1$ und zugleich der Sinn pqr mit dem Sinne $p_1\,q_1\,r_1$ übereinstimmt oder der Sinn abc dem Sinne $a_1\,b_1\,c_1$ und zugleich der Sinn pqr dem Sinne $p_1\,q_1\,r_1$ entgegengesetzt ist, so liegen die Geraden s, s_1 auf einerlei Seite der Regelfläche. Dasselbe ist der Fall, wenn die Systeme reciprok zu einander sind und überdiess entweder der Sinn abc mit dem Sinne $a_1\,b_1\,c_1$ und zugleich der Sinn pqr mit dem Sinne $r_1\,q_1\,p_1$ oder der Sinn abc mit dem Sinne $c_1\,b_1\,a_1$ und zugleich der Sinn pqr mit dem Sinne $p_1\,q_1\,r_1$ übereinstimmt. In allen übrigen Fällen sind die Geraden s, s_1 durch die Regelfläche getrennt.

---

§. 4.

Involutorische Gebilde.

70. Wenn in zwei zu einander projektivischen Elementargebilden, welche in einander liegen, irgend zwei und mithin (G. 215) je zwei homologe Elemente einander abwechselnd entsprechen, so heissen die Gebilde involutorisch liegend und je zwei homologe Elemente derselben einander zugeordnet. Gewöhnlich wird aber von zwei solchen Gebilden nur wie von einem Gebilde gesprochen, dessen Elemente involutorisch gepaart seien.

Will man die Elemente eines Elementargebildes involutorisch paaren, so kann man zwei Elementenpaare AA_1, BB_1 nach Belieben annehmen und das hiedurch bestimmte involutorische Gebilde durch $AA_1 . BB_1 \ldots$ bezeichnen. Wird das Gebilde durch AA_1.

$BB_1 . CC_1 ...$ bezeichnet, so ist angedeutet, dass CC_1 ein drittes Elementenpaar desselben und also $AA_1 . BB_1 . CC_1$ eine Involution ist.

Anm. Der in G. 215 für einförmige Gebilde geführte Beweis gilt auch (24) für Elementargebilde II. Ordnung.

71. In einem involutorischen Elementargebilde $AA_1 . BB_1 ...$ ist entweder jeder Sinn sich selbst oder dem ihm entgesetzten Sinne zugeordnet. Im erstern Falle, wenn nämlich der Sinn ABA_1 mit dem ihm zugeordneten Sinne $A_1 B_1 A$ übereinstimmt, wird das Gebilde durch je zwei einander zugeordnete Elemente in zwei einander zugeordnete Theile getheilt, daher jedes Elementenpaar durch jenes andere Elementenpaar getrennt und kein Element sich selbst zugeordnet ist. Im letztern Falle, wenn nämlich der Sinn ABA_1 dem Sinne $A_1 B_1 A$ entgegengesetzt und also kein Elementenpaar durch ein anderes Elementenpaar getrennt ist, enthält das Gebilde zwei Elemente M, N, welche sich selbst zugeordnet und daher (24) durch je zwei einander zugeordnete Elemente harmonisch getrennt sind. In diesem Falle kann das involutorische Gebilde, da es durch seine Ordnungselemente M, N, so wie auch durch das eine dieser Elemente und zwei einander zugeordnete A, A_1 bestimmt ist, auch durch $MM . NN ...$ oder $MM . AA_1 ...$ bezeichnet werden. Vorausgesetzt wird hiebei, dass das Elementargebilde an sich gegeben und also nur anzudeuten ist, wie seine Elemente involutorisch gepaart sind.

In der Involution $MM . AA_1 . BB_1$ vertritt das Element M, welches sich selbst zugeordnet ist, die Stelle eines Elementenpaares. Die Involution $MM . NN . AA_1$ sagt nichts anderes aus, als dass die Elemente M, N durch die Elemente A, A_1 harmonisch getrennt sind.

Sind A, B, F, G, P fünf Elemente eines und desselben Elementargebildes, so ist entweder $AB . FG . PP$ eine Involution, oder es gibt ein von P verschiedenes Element Q, so dass $AB . GF . PQ$ eine Involution ist. Ist AFBP kein harmonischer Wurf, so enthält das Gebilde auch ein von P verschiedenes Element R, so dass $AB . FF . PR$ eine Involution ist.

72. Sind zwei Elementargebilde $ABC ...$, $abc ...$ zu einander projektivisch, so entspricht jeder Involution $AA_1 . BB_1 . CC_1$ in dem einen eine Involution $aa_1 . bb_1 . cc_1$ im andern. Denn von

den vier Würfen $a a_1 b c$, $A A_1 B C$, $A_1 A B_1 C_1$, $a_1 a b_1 c_1$ ist jeder folgende zum vorhergehenden, mithin auch der letzte zum ersten projektivisch. Wenn man also die Elemente des einen von zwei zu einander projektivischen Elementargebilden $ABC\ldots$, $abc\ldots$ involutorisch paart und alsdann je zwei Elemente des andern, welche zwei einander zugeordneten Elementen des erstern entsprechen, ebenfalls einander zugeordnet nennt, so sind auch die Elemente des andern involutorisch gepaart. Sind $ABC\ldots$, $abc\ldots$ zwei ungleichartige zu einander perspektivische Gebilde, so sollen auch die involutorischen Gebilde, welche man auf die angegebene Weise erhält, zu einander perspektivisch heissen.

Ein involutorisches gerades Gebilde $AA_1 . BB_1 \ldots$ und ein involutorischer Strahlenbüschel $e e_1 . f f_1 \ldots$ I. Ordnung, dessen Mittelpunkt S nicht in dem Träger u des geraden Gebildes liegt, sind also zu einander perspektivisch, wenn in dem Strahlenbüschel dem Strahle SA der Strahl SA_1 und dem Strahle SB der Strahl SB_1 zugeordnet ist, mithin der involutorische Strahlenbüschel auch durch $S\,(AA_1 . BB_1 \ldots)$ und das involutorische gerade Gebilde auch durch $u\,(e e_1 . f f_1 \ldots)$ bezeichnet werden kann.

73. Ein involutorisches Punktgebilde $AA_1 . BB_1 . CC_1 \ldots$ II. Ordnung wird aus jedem Punkte S der Curve durch einen involutorischen Strahlenbüschel $S\,(AA_1 . BB_1 . CC_1 \ldots)$ projicirt.

Ein ivolutorischer Strahlenbüschel $aa_1 . bb_1 \ldots$ II. Ordnung wird von jeder Geraden s, die ihm angehört, in einem involutorischen geraden Gebilde $s\,(aa_1 . bb_1 . cc_1 \ldots)$ geschnitten.

Eine involutorische Regelschaar wird von jedem ihrer Leitstrahlen in einem involutorischen geraden Gebilde und von jeder der Regelfläche sich nicht anschmiegenden Ebene in einem involutorischen Punktgebide II. Ordnung geschnitten.

Eine involutorische Regelschaar wird aus jedem ihrer Leitstrahlen durch einen involutorischen Ebenenbüschel I. Ordnung und aus jedem ausserhalb der Regelfläche liegenden Punkte durch einen involutorischen Ebenenbüschel II. Ordnung projicirt.

74. Wenn ein Punkt S mit einer Curve II. Ordnung in einerlei Ebene aber nicht in der Curve liegt, und man je zwei Punkte A, A_1 der Curve, welche mit jenem Punkte in einer und

und derselben Geraden liegen, einander zugeordnet nennt, so sind die Elemente der Curve involutorisch gepaart. Dasselbe gilt von den Elementen des der Curve sich ansahmiegenden Strahlenbüschels, wenn man je zwei Strahlen a, a_1, welche die Curve in zwei einander zugeordneten Punkten berühren und also die Polare s des Punktes S in einem und demselben Punkte schneiden, einander zugeordnet nennt. Es sind nämlich sowohl die Punkte A, A_1 als auch die Geraden a, a_1 durch den Punkt S und die Gerade s harmonisch getrennt und daher in dem involutorischen ebenen Systeme einander zugeordnet, dessen Ordnungspunkt der Punkt S und dessen Ordnungslinie die Gerade s ist.

Wenn im Punkte S zwei Tangenten der Curve sich schneiden und also die Gerade s mit der Curve zwei Punkte gemein hat, so sind diese Punkte die Ordnungspunkte des involutorischen Punktgebildes und jene Tangenten die Ordnungsstrahlen des involutorischen Strahlenbüschels. Wenn hingegen durch den Punkt S keine Tangente der Curve geht und also die Gerade s mit derselben keinen Punkt gemein hat, so enthält keines von den beiden involutorischen Gebilden zwei sich selbst zugeordnete Elemente. In beiden Fällen aber soll der Punkt S das Involutionscentrum und die Gerade s die Involutionsaxe sowohl des einen als auch des andern involutorischen Gebildes heissen. Projicirt man beide Gebilde aus einem und demselben ausserhalb der Ebenen liegenden Punkte M, so erhält man eine involutorische Kegelfläche (eine Kegelfläche, deren Elemente involutorisch gepaart sind) und einen ihr sich anschmiegenden involutorischen Ebenenbüschel. Die gemeinschaftliche Involutionsaxe MS dieser Gebilde liegt mit je zwei einander zugeordneten Geraden der Kegelfläche in einerlei Ebene, während ihre gemeinschaftliche Involutionsebene Ms von je zwei einander zugeordneten Ebenen des Ebenenbüschels in einer und derselben Geraden geschnitten wird.

Indirekt folgt aus dem Obigen und aus 70, dass die Geraden, deren jede zwei einander zugeordnete Punkte einer involutorischen Curve II. Ordnung verbindet, alle durch einen und denselben Punkt gehen, und dass die Punkte, in deren jedem zwei einander zugeordnete Strahlen eines involutorischen Strahlenbüschels II. Ordnung sich schneiden, alle in einer und derselben Geraden liegen.

75. Sind eine involutorische Curve II. Ordnung und ein involutorisches gerades Gebilde, welches in der Involutionsaxe des erstern Gebildes liegt, zu einem und demselben involutorischen Strahlenbüschel I. Ordnung perspektivisch, so sind (G. 253) je zwei einander zugeordnete Punkte des geraden Gebildes in Hinsicht auf die Curve einander conjugirt. Und wenn je zwei einander zugeordnete Punkte eines involutorischen geraden Gebildes, welches in der Involutionsaxe einer involutorischen Curve II. Ordnung liegt, in Hinsicht auf die Curve conjugirt sind, so werden beide Gebilde aus jedem ausserhalb des erstern liegenden Punkte des letztern durch einen und denselben involutorischen Strahlenbüschel projicirt.

Sind ein involutorischer Strahlenbüschel II. Ordnung und ein involutorischer Strahlenbüschel I. Ordnung, dessen Mittelpunkt das Involutionscentrum des erstern Büschels ist, zu einem und demselben involutorischen geraden Gebilde perspektivisch, so sind je zwei einander zugeordnete Strahlen des letztern Büschels in Hinsicht auf den erstern einander conjugirt. Und wenn je zwei einander zugeordnete Strahlen eines involutorischen Strahlenbüschels I. Ordnung, dessen Mittelpunkt das Involutionscentrum eines involutorischen Strahlenbüschels II. Ordnung, in Hinsicht auf diesen Büschel einander conjugirt sind, so schneidet jede nicht durch den Mittelpunkt des erstern Büschels gehende Gerade des letztern beide Büschel in einem und demselben involutorischen geraden Gebilde.

Anm. Zwei Elemente heissen in Hinsicht auf eine Curve K II. Ordnung so wie auch in Hinsicht auf den derselben sich anschmiegenden Strahlenbüschel einander conjugirt, wenn sie in dem Polarsysteme einander conjugirt sind, dessen Ordnungscurve die Curve K ist.

76. Wenn zwei nicht in einerlei Ebene liegende Gerade f, g in Hinsicht auf eine Regelfläche R einander zugeordnet sind, so giebt es zu jeder in der Fläche liegenden Geraden a, welche jene Geraden nicht schneidet, eine andere in der Fläche liegende Gerade a_1, welche von der erstern durch jene Geraden harmonisch getrennt ist.

Da nämlich in dem Polarsysteme, dessen Ordnungsfläche die Fläche R ist, die Gerade f der Geraden g, die Gerade a aber sich selbst zugeordnet ist, so gilt diess auch von der Geraden a_1, welche zu den drei Geraden f, a, g (oder g, a, f) die vierte harmonische Gerade ist.

Hat also eine Gerade s, welche die Geraden f, g in zwei ausserhalb der Regelfläche liegenden Punkten schneidet, mit der Fläche irgend einen Punkt ap gemein, so muss sie mit derselben noch einen Punkt $a_1 p_1$ gemein haben und in diesen Punkten zwei Gerade a, a_1 der einen Regelschaar und zwei Gerade p, p_1 der andern Regelschaar schneiden, so dass sowohl die Geraden a, a_1 als auch die Geraden p, p_1 durch die Geraden f, g harmonisch getrennt sind.

77. Will man die Elemente einer gegebenen Regelschaar involutorisch paaren, so darf man nur (nach 72 und 74) irgend eine der Regelfläche sich nicht anschmiegende Ebene U und in dieser Ebene, aber ausserhalb der Regelfläche, einen Punkt S annehmen und alsdann zwei Gerade a, a_1 der Regelschaar einander zugeordnet nennen, wenn die Punkte Ua, Ua_1, in welchen sie die angenommene Ebene schneiden, mit dem angenommenen Punkte S in einer und derselben Geraden s liegen und also die Ebenen Sa, Sa_1 die Ebene U in einer und derselben Geraden s schneiden. Je zwei einander zugeordnete Gerade dieser involutorischen Regelschaar sind (76) durch die Gerade f, welche den Punkt S mit dem Pole der Ebene U verbindet, und durch die Gerade g, in welcher die Ebene U von der Polare des Punktes S geschnitten wird, harmonisch getrennt.

Der Punkt S ist das Involutionscentrum, die Gerade g aber die Involutionsaxe der involutorischen Curve, in welcher die involutorische Regelschaar von der Ebene U geschnitten wird.

Die Ebene U ist die Involutionsebene, die Gerade f aber die Involutionsaxe des involutorischen Ebenenbüschels, welcher die involutorische Regelschaar aus dem Punkte S projicirt.

78. Wenn zwei nicht in einerlei Ebene liegende Gerade f, g in Hinsicht auf eine Regelfläche einander zugeordnet sind, und man nennt je zwei in der Fläche liegende Gerade, welche durch die Geraden f, g harmonisch getrennt sind, einander zugeordnet, so sind sowohl die Geraden der einen als auch die Geraden der andern Re-

gelschaar involutorisch gepaart. Die beiden involutorischen Regelschaaren werden

von jeder der Regelfläche sich nicht anschmiegenden Ebene, welche durch eine der Geraden f, g geht, in einer und derselben involutorischen Curve geschnitten, deren Involutionsaxe jene Gerade ist und deren Involutionscentrum in der andern liegt.

aus jedem Punkte, welcher in einer der Geraden f, g aber ausserhalb der Regelfläche liegt, durch einen und denselben involutorischen Ebenenbüschel projicirt, dessen Involutionsaxe jene Gerade ist, und dessen Involutionsebene durch die andere geht.

Wenn die Geraden f, g die Regelfläche schneiden, so sind sie zwei Kanten eines Tetraeders, dessen vier übrige Kanten (26) die Ordnungselemente der involutorischen Regelschaaren sind. Wird aber die Regelfläche von den Geraden f, g nicht geschnitten, so haben die involutorischen Regelschaaren keine Ordnungselemente.

79. Eine Gerade soll eine Involutionsaxe von einer involutorischen Regelschaar heissen, wenn sie von ihrer Polare (der ihr in Hinsicht auf die Regelfläche zugeordneten Geraden) durch je zwei einander zugeordnete Gerade der Regelschaar harmonisch getrennt ist. Eine involutorische Regelschaar wird

von jeder der Regelfläche sich nicht anschmiegenden Ebene in einer involutorischen Curve geschnitten, deren Involutionsaxe (77) zugleich eine Involutionsaxe der involutorischen Regelschaar ist, daher in jeder der Regelfläche sich nicht anschmiegenden Ebene eine, aber auch (78) nur eine, Involutionsaxe der involutorischen Regelschaar liegt.

aus jedem ausserhalb der Regelfläche liegenden Punkte durch einen involutorischen Ebenenbüschel projicirt, dessen Involutionsaxe zugleich eine Involutionsaxe der involutorischen Regelschaar ist, daher durch jeden ausserhalb der Regelfläche liegenden Punkt eine aber auch nur eine Involutionsaxe der involutorischen Regelschaar geht.

Enthält eine involutorische Regelschaar zwei Ordnungselemente, so werden diese von jeder Involutionsaxe derselben geschnitten. Und wenn eine ausserhalb der Regelfläche liegende Gerade die beiden Ordnungselemente der involutorischen Regelschaar schneidet, so ist

sie eine Involutionsaxe derselben. Hat eine involutorische Regelschaar keine Ordnungselemente, so liegen je zwei zusammengehörige Involutionsaxen derselben, welche nämlich in Hinsicht auf die Regelfläche einander zugeordnet sind, auf entgegengesetzten Seiten dieser Fläche.

80. Wenn $a a_1 . b b_1 \ldots$ eine involutorische Regelschaar ist und zwei ausserhalb der Regelfläche liegende Gerade f, g sowohl durch das Elementenpaar $a a_1$ als auch durch das Elementenpaar $b b_1$ harmonisch getrennt sind, so sind jene Geraden zwei zusammengehörige Involutionsaxen der involutorischen Regelschaar und daher auch durch jedes dritte Elementenpaar derselben harmonisch getrennt.

Es sei U irgend eine durch die Gerade f gehende der Regelfläche sich nicht anschmiegende Ebene, so schneidet diese die involutorische Regelschaar in einer involutorischen Curve $U(a a_1 . b b_1 \ldots)$, deren Involutionsaxe die Gerade f ist, welche vom Punkte Ug sowohl durch die Punkte Ua, Ua_1 als auch durch die Punkte Ub, Ub_1 harmonisch getrennt ist. Da hiernach (79) die Gerade f auch die eine von zwei zusammengehörigen Involutionsaxen der involutorischen Regelschaar ist, so ist die andere die Gerade g, welche von der erstern durch die Geraden a, a_1 harmonisch getrennt ist.

81. Sind eine involutorische Regelschaar und ein involutorisches gerades Gebilde, dessen Träger eine Involutionsaxe des erstern Gebildes ist, zu einem und demselben involutorischen Ebenenbüschel I. Ordnung perspektivisch, so sind (75) je zwei einander zugeordnete Punkte des geraden Gebildes in Hinsicht auf die Regelfläche einander conjugirt. Und wenn je zwei einander zugeordnete Punkte eines involutorischen geraden Gebildes, dessen Träger eine Involutionsaxe einer involutorischen Regel-

Sind eine involutorische Regelschaar und ein involutorischer Ebenenbüschel I. Ordnung, dessen Axe eine Involutionsaxe des erstern Gebildes ist, zu einem und demselcen involutorischen geraden Gebilde perspektivisch, so sind je zwei einander zugeordnete Ebenen des Ebenenbüschels in Hinsicht auf die Regelfläche einander conjugirt. Und wenn je zwei einander zugeordnete Ebenen eines involutorischen Ebenenbüschels I. Ordnung, dessen Axe eine Involutionsaxe einer involutorischen Regelschaar

schaar ist, in Hinsicht auf die Regelfläche einander conjugirt sind, so werden die beiden involutorischen Gebilde aus jedem Leitstrahle der Regelschaar, welcher das gerade Gebilde nicht schneidet, durch einen und denselben involutorischen Ebenenbüschel projicirt.

ist, in Hinsicht auf die Regelfläche einander conjugirt sind, so werden die beiden involutorischen Gebilde von jedem Leitstrahle der Regelschaar, welcher die Axe des Ebenenbüschels nicht schneidet, in einem und demselben involutorischen geraden Gebilde geschnitten.

82. Durch zwei in einander liegende involutorische Elementargebilde $AA_1 . BB_1 \ldots$, $EE_1 . FF_1 \ldots$, von welchen wenigstens das eine keine Ordnungselemente hat, sind zwei Elemente bestimmt, welche nämlich sowohl in dem einen als auch in dem andern der gegebenen Gebilde einander zugeordnet sind.

Es seien die gegebenen Gebilde zwei in einer und derselben Curve II. Ordnung liegende involutorische Punktgebilde, so schneidet die Gerade, welche das Involutionscentrum des einen Gebildes mit dem Involutionscentrum des andern verbindet, die Curve in den beiden Punkten, welche sowohl in dem einen als auch in dem andern Gebilde einander zugeordnet sind. Jeder andere Fall kann (72) auf den betrachteten zurückgeführt werden.

83. Ein Wurf $abcd$ soll ein ordentlicher Wurf heissen, wenn das erste und dritte seiner Elemente durch das zweite und vierte getrennt sind. In jedem involutorischen Elementargebilde $AA_1 . BB_1 \ldots$, welches keine Ordnungselemente hat, giebt es zu je zwei einander zugeordneten Elementen P, P_1 zwei einander zugeordnete Elemente Q, Q_1, so dass der Wurf PQP_1Q_1 zu einem gegebenen ordentlichen Wurfe $abcd$ projektivisch ist und überdiess der Sinn PQP_1 mit dem Sinne ABA_1 übereinstimmt. Eben so giebt es zwei einander zugeordnete Elemente R, R_1, so dass der Wurf PRP_1R_1 zu dem Wurfe $abcd$ projektivisch, der Sinn PRP_1 aber dem Sinne ABA_1 entgegengesetzt ist.

Es sei das gegebene Gebilde $AA_1 . BB_1 \ldots$ eine involutorische Curve II. Ordnung und S das Involutionscentrum derselben, so giebt es in der Geraden PP_1 einen Punkt S_1, so dass $PSP_1S_1 \barwedge abcd$ ist. Die Polare des Punktes S_1 schneidet die Curve in zwei Punkten Q_1, R_1, so dass der Sinn P_1Q_1P mit dem Sinne ABA_1

übereinstimmt, der Sinn $P_1 R_1 P$ aber demselben entgegengesetzt ist. Sind also Q, R die Punkte, welche in dem involutorischen Gebilde $AA_1 . BB_1 \ldots$ den Punkten Q_1, R_1 zugeordnet sind, so stimmt auch der Sinn PQP_1 mit dem Sinne ABA_1 überein, während der Sinn PRP_1 demselben entgegengesetzt ist. Die Würfe PQP_1Q_1, PRP_1R_1 aber sind beide zu dem Wurfe PSP_1S_1 und also auch zu dem gegebenen Wurfe projektivisch, weil $PQP_1Q_1 \barwedge Q_1(PSP_1S_1)$ und $PRP_1R_1 \barwedge R_1(PSP_1S_1)$ ist. Ist abcd ein harmonischer Wurf, so fällt Q mit R_1 und R mit Q_1 zusammen.

84. Zwei involutorische Regelschaaren $aa_1 . bb_1 \ldots$, $pp_1 . qq_1 \ldots$, von welchen jede die Leitschaar der andern ist und entweder jede oder keine zwei Ordnungselemente enthält, haben zwei zusammengehörige Involutionsaxen mit einander gemein.

Endhält nämlich jede von den beiden Regelschaaren zwei sich selbst zugeordnete Gerade, so sind diese vier Geraden vier Kanten eines Tetraeders, dessen zwei übrige Kanten (79) die im Satze erwähnten Involutionsaxen sind.

Enthält keine von den beiden involutorischen Regelschaaren zwei Ordnungselemente, so kann man (83) annehmen, dass die Würfe aba_1b_1, pqp_1q_1 zu einander projektivisch sind. Da nun (14) die durch die drei Punkte ap, bq, a_1p_1 gehende Ebene U auch durch den Punkt b_1q_1 geht, so schneidet dieselbe die beiden involutorischen Regelschaaren in einer und derselben involutorischen Curve $U(aa_1 . bb_1 \ldots)$, deren Involutionsaxe f eine gemeinschaftliche Involutionsaxe der beiden erstern Gebilde ist. Eine andere gemeinschaftliche Involutionsaxe derselben ist die Gerade g, welche der Geraden f in Hinsicht auf die Regelfläche zugeordnet ist, folglich durch den Schnittpunkt der beiden Geraden geht, von welchen die eine u den Punkt ap mit dem Punkte a_1p_1 und die andere v den Punkt bq mit dem Punkte b_1q_1 verbindet. Und wenn h eine gemeinschaftliche Involutionsaxe der beiden involutorischen Regelschaaren ist, so geht die durch die Gerade h und den Punkt ap bestimmte Ebene, da sie beide Gebilde in einer und derselben involutorischen Curve schneidet, deren Involutionsaxe nämlich die Gerade h ist, auch durch den Punkt a_1p_1. Da hiernach die Gerade h die Gerade u und eben so die Gerade v schneidet, so muss sie entweder in der Ebene U liegen oder durch den Punkt

uv gehen, also (79) entweder mit der Geraden f oder mit der Geraden g zusammenfallen.

85. Wenn P, Q, A, B, A_1, B_1 sechs Elemente eines und desselben Elementargebildes sind, und der Wurf $PQAB$ zu dem Wurfe PQA_1B_1 mithin auch (24) zu dem Wurfe QPB_1A_1 projektivisch ist, so ist (70) $PQ.AB_1.A_1B$ eine Involution und daher auch $PQAA_1 \barwedge QPB_1B \barwedge PQBB_1$. Sind die Elemente P, Q durch die Elemente A, B und also auch durch die Elemente A_1, B_1 harmonisch getrennt, so ist auch $PQ.AA_1.BB_1$ eine Involution und daher auch $PQAB_1 \barwedge QPA_1B \barwedge PQBA_1$.

Haben zwei zu einander projektivische Elementargebilde, welche in einander liegen, das Element P aber kein anderes Element entsprechend gemein, während den Elementen A, B des einen die Elemente A_1, B_1 des andern entsprechen, was durch $\overline{P}AB \barwedge \overline{P}A_1B_1$ bezeichnet werden soll, so ist $PP.AB_1.A_1B$ eine Involution und auch $\overline{P}AA_1 \barwedge \overline{P}BB_1$. Gäbe es nämlich ein von P verschiedenes Element Q, so dass $PQAA_1 \barwedge PQBB_1$ und also $PQ.AB_1.A_1B$ eine Involution wäre, so hätten die zu einander projektivischen Gebilde $PAB\ldots$, $PA_1B_1\ldots$ noch ein Element Q entsprechend gemein, was gegen die Annahme ist. — Will man also zwei in einander liegende Elementargebilde projektivisch so auf einander beziehen, dass sie das Element P, aber kein anderes Element entsprechend gemein haben, so kann man nur noch zu einem Elemente A des einen Gebildes das ihm entsprechende Element A_1 das andern nach Belieben annehmen.

86. Wenn P, Q, A, A_1, A_2 fünf Elemente eines und desselben Elementargebildes sind, und der Wurf $PQAA_1$ zu dem Wurfe PQA_1A_2, mithin auch zu dem Wurfe QPA_2A_1 projektivisch ist, so ist $PQ.AA_2.A_1A_1$ eine Involution. Und wenn $PQ.AA_2.A_1A_1$ eine Involution ist, so ist $PQAA_1 \barwedge QPA_2A_1 \barwedge PQA_1A_2$. Indirekt folgt hieraus:

Haben zwei zu einander projektivische Elementargebilde, welche in einander liegen, das Element P und zwar nur dieses Element entsprechend gemein, während den Elementen A, A_1 des einen Gebildes die Elemente A_1, A_2 des andern entsprechen, so ist $PP.AA_2.A_1A_1$ eine Involution und also PAA_1A_2 ein harmonischer

Wurf. Und wenn die Elemente $\bar{P}$, A_1 durch die Elemente A, A_2 harmonisch getrennt sind, so ist $\bar{P} A A_1 \barwedge \bar{P} A_1 A_2$.

87. Aus 85 ergeben sich noch nachstehende Sätze, in welchen ebenfalls nur Elemente eines und desselben Elementargebildes betrachtet werden:

Wenn $PQABC \barwedge PQA_1B_1C_1 \barwedge PQA_2B_2C_2$ ist, so ist auch $PQAA_1A_2 \barwedge PQBB_1B_2 \barwedge PQCC_1C_2$. — Ist $\bar{P}ABC \barwedge \bar{P}A_1B_1C_1 \barwedge \bar{P}A_2B_2C_2$, so ist auch $\bar{P}AA_1A_1 \barwedge \bar{P}BB_1B_2 \barwedge \bar{P}CC_1C_2$.

---

§. 5.

Involutorische Regelschaaren in Polarsystemen.

88. Wenn zwei Systeme projektivisch so auf einander bezogen sind, dass je zwei homologe Elemente einander abwechselnd entsprechen, so heissen die Systeme involutorisch liegend und je zwei homologe Elemente derselben einander zugeordnet. Spricht man von den beiden Systemen nur wie von einem Systeme, so heisst dieses, wenn je zwei einander zugeordnete Elemente gleichartig sind, ein involutorisches System, ausserdem aber ein Polarsystem. In beiden Fällen ist jedem Elementargebilde $ABC\ldots$ ein zu ihm projektivisches Elementargebilde $A_1B_1C_1\ldots$ zugeordnet. Liegen nun diese Gebilde in einander, ohne dass jedoch jedes Element des einen mit dem ihm zugeordneten Elemente des andern zusammenfällt, so ist $AA_1 . BB_1 . CC_1 \ldots$ ein involutorisches Elementargebilde, welches, da je zwei einander zugeordnete Elemente desselben auch in dem Systeme einander zugeordnet sind, in diesem enthalten heissen soll. So sind in einem involutorischen ebenen Systeme unendlich viele involutorische Punktgebilde und Strahlenbüschel erster und zweiter Ordnung enthalten.

89. Durch zwei involutorische Regelschaaren $aa_1 . bb_1 . cc_1 \ldots$, $pp_1 . qq_1 . rr_1 \ldots$, von welchen jede die Leitschaar der andern ist, ist ein gewöhnliches Polarsystem bestimmt, in welchem die beiden involutorischen Regelschaaren enthalten sind.

Bezieht man nämlich (8) zwei räumliche Systeme reciprok so auf einander, dass den Geraden a, b, a_1, p, q, p_1 des einen Systems die Geraden a_1, b_1, a, p_1, q_1, p des andern entsprechen, so hat

man ein Polarsystem, in welchem je zwei einander zugeordnete Gerade sowohl der einen als auch der andern involutorischen Regelschaar ebenfalls einander zugeordnet sind. Dem Punkte ap ist die Ebene $a_1 p_1$, dem Schnittpunkte der drei Ebenen ap, bq, cr die durch die drei Punkte $a_1 p_1$, $b_1 q_1$, $c_1 r_1$ gehende Ebene zugeordnet. Je zwei einander zugeordnete Punkte des involutorischen geraden Gebildes $p(aa_1 . bb_1 . cc_1 ...)$, so wie auch je zwei einander zugeordnete Ebenen des involutorischen Ebenenbüschels $p(aa_1 . bb_1 . cc_1 ...)$ sind in dem Polarsysteme einander conjugirt.

Wenn die eine von den beiden Regelschaaren oder jede derselben zwei sich selbst zugeordnete Elemente enthält, so hat das Polarsystem eine Ordnungsfläche, welche mit der gegebenen Regelfläche im erstern Falle zwei, im letztern aber vier Gerade gemein hat, folglich selbst eine Regelfläche ist. Wenn aber keine von den beiden involutorischen Regelschaaren zwei Ordnungselemente und also keine der vier Geraden a, a_1, p, p_1 zwei sich selbst conjugirte Punkte enthält, so liegt jeder Punkt des Polarsystems ausserhalb seiner Polare. — Hat ein Polarsystem eine Ordnungsfläche, die weder mit der einen noch mit der andern von zwei einander zugeordneten Geraden a, a_1 einen Punkt gemein hat, so ist die Fläche eine Regelfläche, welche, da die Geraden a, a_1 auf entgegengesetzten Seiten derselben liegen, von jeder Geraden, welche die beiden Geraden a, a_1 schneidet, geschnitten wird.

90. In jedem gewöhnlichen räumlichen Polarsysteme, dessen Ordnungsfläche entweder eine Regelfläche ist oder in welchem kein Punkt sich selbst conjugirt ist, sind unendlich viele involutorische Regelschaaren enthalten.

Wenn nämlich in einem Polarsysteme die Gerade p der Geraden p_1 zugeordnet aber weder ein Punkt der Geraden p noch ein Punkt der Geraden p_1 sich selbst conjugirt ist, so kann man (83) in der Geraden p einen harmonischen Wurf ABA_1B_1 und in der Geraden p_1 einen harmonischen Wurf EFE_1F_1 annehmen, so dass in dem Polarsysteme den Punkten A, B, E, F die Punkte A_1, B_1, E_1, F_1 conjugirt sind. Da nun die Geraden a, b, a_1, b_1, welche die Punkte A, B, A_1, B_1 beziehlich mit den Punkten E, F, E_1, F_1 verbinden, einer und derselben Regelschaar angehören, dem Punkte A aber die Ebene $p_1 A_1$, dem Punkte E die Ebene

pE_1, mithin der Geraden a die Gerade a_1 und eben so der Geraden b die Gerade b_1 zugeordnet ist, so ist $aa_1 . bb_1 \dots$ eine in dem Polarsysteme enthaltene involutorische Regelschaar. — Ist in einem Polarsysteme die Gerade a der Geraden a_1, die Gerade m aber sich selbst zugeordnet, so ist, wenn nämlich keine zwei von den drei Geraden m, a, a_1 sich schneiden, auch $mm . aa_1 \dots$ eine in dem Systeme enthaltene involutorische Regelschaar.

Jede in einem gewöhnlichen Polarsysteme enthaltene involutorische Regelschaar $aa_1 . bb_1 \dots$ ist von einer andern in demselben Systeme enthaltenen involutorischen Regelschaar die Leitschaar. Denn jeder sich nicht selbst zugeordnete Leitstrahl p der erstern Regelschaar ist einem andern Leitstrahle p_1 derselben zugeordnet.

91. Durch eine Regelfläche F und vier in ihr liegende Gerade m, n, s, t, von welchen zwei m, n der einen, die beiden übrigen aber der andern Regelschaar angehören, ist eine andere Regelfläche F_1 bestimmt, welche mit der erstern die vier gegebenen Geraden gemein hat, so dass überdiess je zwei Gerade, welche in irgend einer von den beiden Regelflächen liegen und durch zwei von jenen vier Geraden harmonisch getrennt sind, in Hinsicht auf die andere Fläche einander zugeordnet sind.

Es seien in der Fläche F die Geraden m, n durch die Geraden a, a_1 und die Geraden s, t durch die Geraden p, p_1 harmonisch getrennt, so ist F_1 die Ordnungsfläche desjenigen Polarsystems, in welchem (89) die beiden involutorischen Regelschaaren $mm . aa_1 \dots$, $ss . pp_1 \dots$ enthalten sind. Die Geraden s, t, a, a_1 sind zwei Paar Gegenkanten eines Tetraeders, dessen beide übrigen Kanten ebenfalls durch die Geraden m, n harmonisch getrennt sind, aber in der Fläche F_1 liegen und in Hinsicht auf die Fläche F einander zugeordnet sind.

Jede Ebene U, welche keiner von den beiden Flächen F, F_1 sich anschmiegt, schneidet dieselben in zwei Curven II. Ordnung, so dass je zwei Punkte, welche in irgend einer dieser Curven liegen und in ihr durch die Punkte Um, Un oder durch die Punkte Us, Ut harmonisch getrennt sind, in Hinsicht auf die andere einander conjugirt sind.

92. Durch eine involutorische Regelschaar $aa_1 . bb_1 \dots$ ist ein

Nullsystem $a a_1 . b b_1 \ldots$ bestimmt, in welchem nämlich die gegebene involutorische Regelschaar enthalten ist.

Es seien p, q, r irgend drei Leitstrahlen der gegebenen Regelschaar. Bezieht man nun zwei räumliche Systeme reziprok so auf einander, dass den Geraden p, q, r, a, a_1, b des einen Systems die Geraden p, q, r, a_1, a, b_1 des andern entsprechen, so hat man das im Satze erwähnte Nullsystem. Der Punkt a p ist der Ebene a_1 p, der Punkt a_1 q der Ebene a q und demnach die Gerade, welche den Punkt a p mit dem Punkte a_1 q verbindet, weil sie zugleich die Schnittlinie der Ebenen a_1 p, a q ist, sich selbst zugeordnet. Da eben so jede andere Gerade, welche zwei einander zugeordnete Gerade der involutorischen Regelschaar $a a_1 . b b_1 \ldots$ schneidet, sich selbst zugeordnet ist, so folgt:

Jeder Ebene, welche der Regelfläche sich nicht anschmiegt, also die involutorische Regelschaar in einem involutorischen Punktgebilde II. Ordnung schneidet, ist das Involutionscentrum dieses Gebildes zugeordnet.

Jedem ausserhalb der Regelfläche liegenden Punkte, aus welchen also die involutorische Regelschaar durch einen involutorischen Ebenenbüschel II. Ordnung projicirt wird, ist die Involutionsebene dieses Büschels zugeordnet.

Ist in einem Nullsysteme der Geraden g eine andere Gerade g_1 zugeordnet, so ist das gerade Gebilde g ein Schnitt des ihm zugeordneten Ebenenbüschels g_1, daher die Geraden g, g_1 nicht in einerlei Ebene liegen. Jede Gerade h, welche die beiden Geraden g, g_1 schneidet, ist sich selbst zugeordnet, weil dem Punkte g h die Ebene g_1 h und dem Punkte g_1 h die Ebene g h zugeordnet ist. Und wenn eine sich selbst zugeordnete Gerade f die eine g von zwei einander zugeordneten Geraden g, g_1 schneidet, so muss sie auch die andere schneiden, indem die dem Punkte f g zugeordnete Ebene sowohl durch die Gerade f als auch durch die Gerade g_1 gehen muss.

93. Ist in einem Nullsysteme dem Punkte S die Ebene U zugeordnet, so ist jeder Geraden, welche diese Ebene im Punkte S schneidet, eine Gerade zugeordnet, welche in der Ebene U liegt aber nicht durch den Punkt S geht, während jede Gerade, welche

in der Ebene U liegt und zugleich durch den Punkt S geht, sich selbst zugeordnet ist.

Durch eine Regelschaar p q r, einen ausserhalb der Regelfläche liegenden Punkt S und eine Ebene U, welche durch diesen Punkt geht aber der Regelfläche sich nicht anschmiegt, ist ein Nullsystem bestimmt, in welchem jede Gerade der gegebenen Regelschaar sich selbst und der gegebene Punkt der gegebenen Ebene zugeordnet ist. — Sind a, a_1, b, b_1 vier Leitstrahlen der Regelschaar p q r, so dass die beiden Geraden, von welchen die eine den Punkt U a mit dem Punkte U a_1 und die andere den Punkt U b mit dem Punkte U b_1 verbindet, im Punkte S sich schneiden, so ist a a_1. b b_1... das erwähnte Nullsystem. Dem Punkte U a ist die Ebene S a_1 zugeordnet, welche die Regelfläche in der Geraden a_1 und in einer durch den Punkt U a gehenden Geraden der Regelschaar p q r schneidet.

94. Jede Gerade, welche in einem Nullsysteme sich selbst zugeordnet ist, soll ein Leitstrahl des Systems heissen, so dass hiernach jede Gerade, welche irgend zwei einander zugeordnete Gerade schneidet, ein Leitstrahl des Systems ist und jeder Leitstrahl des Systems, welcher die eine von zwei einander zugeordneten Geraden schneidet, auch die andere schneidet.

Wenn also in einem Nullsysteme der Geraden a die Gerade a_1 und der Geraden b die Gerade b_1 zugeordnet ist, so schneidet jede Gerade, welche drei von den vier Geraden a, a_1, b, b_1 schneidet, auch die vierte, daher entweder a a_1 . b b_1... eine in dem Systeme enthaltene involutorische Regelschaar ist oder die Gerade b die eine a und die Gerade b_1 die andere a_1 von den Geraden a, a_1 scheidet. Im letztern Falle ist dem Punkte a b die Ebene a_1 b_1 und der Ebene a b der Punkt a_1 b_1 zugeordnet.

95. In jedem Nullsysteme sind unendlich viele involutorische Regelschaaren enthalten. Durch je drei Leitstrahlen p, q, r des Systems, von welchen keine zwei sich schneiden, ist eine Regelschaar p q r bestimmt, deren Gerade sämmtlich Leitstrahlen des Systems sind, und welche daher von einer im Systeme enthaltenen involutorischen Regelschaar die Leitschaar ist.

Ist in einem Nullsysteme der Geraden a die Gerade a_1 zugeordnet und U eine Ebene, welche die beiden Geraden a, a_1 schnei-

det, so liegen die Schnittpunkte mit dem Nullpunkte S der Ebene in einer und derselben Geraden p. Jeder Geraden b, welche in der Ebene U liegt und die Gerade p in einem vierten Punkte schneidet, ist eine durch den Punkt S gehende Gerade b_1 zugeordnet, so dass $a a_1 . b b_1 \ldots$ eine in dem Nullsysteme enthaltene involutorische Regelschaar ist, welche keine Ordnungselemente oder zwei Ordnungselemente hat, je nachdem die Punkte S, pb durch die Punkte Ua, $U a_1$ getrennt oder nicht getrennt sind. Im erstern Falle ist der Nullpunkt einer jeden der Regelfläche $a b a_1$ sich nicht anschmiegenden Ebene von der Curve eingeschlossen, in welcher die Ebene die Regelfläche schneidet, daher diese Fläche von jedem nicht in ihr liegenden Leitstrahle des Systems in zwei Punkten geschnitten wird. Im letztern Falle liegen in jeder der Regelfläche $a b a_1$ sich nicht anschmiegenden Ebene zwei Leitstrahlen r, s des Nullsystems, welche die Regelfläche berühren, so dass ein dritter in derselben Ebene liegende Leitstrahl des Systems die Regelfläche in zwei Punkten schneidet oder mit ihr gar keinen Punkt gemein hat, je nachdem er dem einen oder dem andern von den beiden Winkeln angehört, welche die Geraden r, s mit einander bilden.

96. Durch drei in einer und derselben Geraden m liegende Punkte A, B, C, dann drei in dieser Geraden sich schneidende Ebenen A_1, B_1, C_1 und eine Gerade n, welche mit der erstern Geraden keinen Punkt gemein hat, ist ein Nullsystem bestimmt, in welchem nämlich jede der Geraden m, n sich selbst zugeordnet ist und überdiess den Punkten A, B, C die Ebenen A_1, B_1, C_1 zugeordnet sind.

Es seien p, q, r die Geraden, welche die Punkte A, B, C beziehlich mit den Punkten $n A_1$, $n B$, $n C_1$ verbinden. Sind nun a, a_1 zwei Leitstrahlen der Regelschaar pqr, welche durch die Gerade n m, n harmonisch getrennt sind, so ist $m m . n n . a a_1 \ldots$ das im Satze erwähnte Nullsystem. Denn in dem Nullsysteme, in welchem die involutorische Regelschaar $m m . n n . a a_1$ enthalten und also jede der Geraden m, n, p, q, r sich selbst zugeordnet ist, sind den Punkten mp, mq, mr die Ebenen mp, mq, mr zugeordnet. Da übrigens jedem Punkte der Geraden m eine durch diese Gerade gehende Ebene zugeordnet ist, welche also mit der Geraden n nur einen

Punkt gemein hat, mithin durch jeden Punkt der Geraden m nur Leitstrahl des Systems geht, welcher auch die Gerade n schneidet, so folgt noch:

Alle Leitstrahlen eines Nullsystems, welche zwei gegebene nicht in einerlei Ebene liegende Leitstrahlen m, n schneiden, gehören einer und derselben Regelschaar an.

97. Durch eine involutarische Regelschaar $a a_1 . b b_1 \ldots$ und eine ausserhalb der Regelfläche liegende Gerade u ist eine Gerade u_1 bestimmt, welche nämlich in dem Nullsysteme $a a_1 . b b_1 \ldots$ der Geraden u zugeordnet isi.

Die involutorische Regelschaar $a a_1 . b b_1 \ldots$ wird von jeder durch die Gerade u gehenden der Regelfläche sich nicht anschmiegenden Ebene in einer involutorischen Curve geschnitten, deren Involutionscentrum (92) in der Geraden u_1 liegt, und aus jedem ausserhalb der Regelfläche liegenden Punkte der Geraden u durch einen involutorischen Ebenenbüschel projicirt, dessen Involutionsebene durch die Gerade u geht. Ist die Gerade u in dem Nullsysteme $a a_1 . b b_1 \ldots$ sich selbst zugeordnet, so fällt u_1 mit u zusammen.

98. Wenn a, a_1, b, b_1 vier Gerade einer und derselben Regelschaar sind, die Gerade u aber dieser Regelschaar nicht angehört und auch keine der vier erstern Geraden schneidet, so berühren sich die Regelflächen $a a_1$ u, $b b_1$ u entweder in der Geraden u oder es haben die Regelschaaren $a a_1$ u, $b b_1$ u noch eine Gerade u_1 mit einander gemein.

Ist nämlich in dem Nullsysteme $a a_1 . b b_1 \ldots$ der Geraden u eine andere Gerade u_1 zugeordnet, so ist diese (94) eine Gerade der Regelschaar $a a_1$ u und zugleich eine Gerade der Regelschaar $b b_1$ u. Wenn aber in dem erwähnten Nullsysteme die Gerade u sich selbst zugeordnet ist, so schneiden je zwei Gerade, welche mit der Geraden u in einerlei Ebene liegen und von welchen die eine ein Leitstrahl der Regelschaar $a a_1$ u, die andere ein Leitstrahl der Regelschaar $b b_1$ u ist, die Gerade u in einem und demselben Punkte, nämlich in dem Nullpunkte der Ebene.

99. Wenn zwei Regelschaaren zwei Gerade a, a_1 mit einander gemein haben und eine Gerade p, welche weder durch einen beiden Regelflächen gemeinschaftlichen Punkt geht noch in einer

beiden Regelflächen sich anschmiegenden Ebene liegt, zwei Gerade b, b_1 der einen Regelschaar und zwei Gerade c, c_1 der andern Regelschaar schneidet, so gehören diese vier Geraden einer und derselben dritten Regelschaar an.

Es sei g der durch den Punkt pc gehende Leitstrahl der Regelschaar $a a_1 c$. Da nun in dem Nullsysteme $a a_1 . b b_1 \ldots$ jede der Geraden p, g sich selbst zugeordnet ist, die Gerade c aber ausserhalb der Ebene pg liegt, so ist der Geraden c eine andere Gerade c_1 zugeordnet, welche die Gerade p in einem vom Punkte pc verschiedenen Punkte schneidet und (94) sowohl der Regelschaar $a a_1 c$ als auch der Regelschaar $b b_1 c$ angehört.

100. Wenn zwei zu einander projektivische Regelschaaren $a a_1 b \ldots$, $a_1 a b_1 \ldots$ zwei Gerade a, a_1, welche einander abwechselnd entsprechen, aber keinen Leitstrahl mit einander gemein haben, so giebt es ihnen zu je zwei homologen Geraden b, b_1 zwei homologe Gerade c, c_1, so dass die vier Geraden b, b_1, c, c_1 einer und derselben Regelschaar angehören und in dieser die Geraden b, c durch die Geraden b_1, c_1 getrennt sind.

Es sei f irgend ein Leitstrahl der Regelschaar $a_1 a b_1$, so gehen durch den Punkt $b_1 f$ zwei Tangenten der Curve, in welcher die Regelfläche $a a_1 b$ von der Ebene $b_1 f$ geschnitten wird. Da nun die Berührungspunkte dieser Tangenten durch die Geraden b_1, f getrennt sind, so sind auch der Berührungspunkt C der einen Tangente und der Punkt B, in welchem die Ebene $b_1 f$ die Gerade b schneidet, durch die Geraden b_1, f getrennt, daher die Gerade BC zwei Gerade b, c der Regelschaar $a a_1 b$ und zwei Gerade b_1, c_1 der Regelschar $a_1 a b_1$ schneidet und in der Regelfläche, in welcher (94) die vier Geraden b, c, b_1, c_1 liegen, die beiden erstern durch die beiden letztern getrennt sind. Da endlich der Punkt $b_1 f$, die Gerade c und der durch den Punkt C gehende Leitstrahl p der Reeglschaar $a a_1 b$ in einerlei Ebene liegen, folglich der Wurf $p\,(a a_1 b c)$ zu dem Wurf $f\,(a a_1 c_1 b_1)$ perspektivisch ist, so ist auch $a a_1 b c \barwedge a a_1 c_1 b_1 \barwedge a_1 a b_1 c_1$.

§. 6.

Involutorische Systeme.

101. Ein involutorisches räumliches System soll, wenn es einen Ordnungspunkt und eine Ordnungsebene hat, perspektivisch-involutorisch, im entgegengesetzten Falle aber geschaart-involutorisch heissen. In einem perspektivisch-involutorischen Systeme sind je zwei einander zugeordnete Elemente durch den Ordnungspunkt und die Ordnungsebene harmonisch getrennt, daher jede sich selbst zugeordnete Gerade entweder der Träger eines im Systeme enthaltenen involutorischen geraden Gebildes oder die Axe eines im Systeme enthaltenen involutorischen Ebenenbüschels ist, je nachdem nämlich die Gerade durch den Ordnungspunkt geht oder in der Ordnungsebene liegt. Und wenn irgend eine in einem involutorischen räumlichen Systeme sich selbst zugeordnete Gerade u entweder der Träger eines im Systeme enthaltenen involutorischen geraden Gebildes oder die Axe eines im Systeme enthaltenen involutorischen Ebenenbüschels aber nicht beides zugleich ist, so ist das System perspektivisch-involutorisch. Im erstern Falle sind nämlich (G. 126) je zwei einander zugeordnete Strahlenbündel, welche zwei einander zugeordnete Punkte der Geraden u zu Mittelpunkten und also jede durch diese Gerade gehende Ebene entsprechend gemein haben, Scheine eines und desselben ebenen Systems, während im letztern Falle je zwei einander zugeordnete ebene Systeme, welche in der Geraden u sich schneiden, da sie alle Punkte dieser Geraden entsprechend gemein haben, Schnitte eines und desselben Strahlenbündels sind.

Wenn also in einem geschaart-involutorischen Systeme eine Gerade sich selbst zugeordnet ist, so ist entweder jeder in ihr liegende Punkt und jede durch sie gehende Ebene sich selbst zugeordnet, oder es ist die Gerade der Träger eines im Systeme enthaltenen involutorischen geraden Gebildes und zugleich die Axe eines im Systeme enthaltenen involutorischen Ebenenbüschels. Im erstern Falle soll die Gerade eine Ordnungslinie des involutorischen Systems, im letztern aber ein Leitstrahl desselben heissen.

Ist von einer in einem involutorischen Systeme enthaltenen

involutorischen Regelschaar die Rede, so versteht es sich von selbst, dass das System ein geschaart-involutorisches ist, da in einem perspektivisch-involutorischen Systeme je zwei einander zugeordnete Gerade sich schneiden, demnach keine involutorische Regelschaar enthalten ist. Dass in einem geschaart-involutorischen Systeme nicht je zwei einander zugeordnete Gerade sich schneiden, geht daraus hervor, weil, wenn E, E_1 zwei einander zugeordnete Ebenen und P, P_1 zwei einander zugeordnete Punkte ihrer Schnittlinie sind, jeder Geraden, welche in der Ebene E liegt und durch den Punkt P geht, eine Gerade zugeordnet ist, welche in der Ebene E_1 liegt und durch den Punkt P_1 geht. Von welcher Art aber auch ein involutorisches räumliches System sein möge, so ist, wenn zwei Gerade, deren jede entweder sich selbst oder der andern zugeordnet ist, sich schneiden, sowohl ihr Schnittpunkt als auch die Ebene, in welcher sie liegen, sich selbst zugeordnet, daher durch jeden Punkt P, welcher einem andern Punkte P_1 zugeordnet ist, nur eine sich selbst zugeordnete Gerade PP_1 geht und in jeder Ebene, welche einer andern Ebene zugeordnet ist, nur eine sich selbst zugeordnete Gerade liegt.

102. Durch zwei involutorische Regelschaaren $aa_1 . bb_1 . cc_1 \ldots$, $pp_1 . qq_1 . rr_1 \ldots$, von welchen jede die Leitschaar der andern ist, ist ein involutorisches System bestimmt, in welchem die beiden involutorischen Regelschaaren enthalten sind.

Bezieht man nämlich zwei räumliche Systeme collineär so auf einander, dass den Geraden a, a_1, b, p, p_1, q des einen Systems die Geraden a_1, a, b_1, p_1, p, q_1 des andern entsprechen, so hat man ein involutarisches System, in welchem je zwei einander zugeordnete Gerade sowohl der einen als auch der andern Regelschaar ebenfalls einander zugeordnet sind. Dem Punkte ap ist daher der Punkt $a_1 p_1$, der Ebene ap die Ebene $a_1 p_1$, dem Schnittpunkte der drei Ebenen ap, bq, cr der Schnittpunkt der drei Ebenen $a_1 p_1$, $b_1 q_1$, $c_1 r_1$ und der durch die drei Punkte ap, bq, cr gehenden Ebene die durch die drei Punkte $a_1 p_1$, $b_1 q_1$, $c_1 r_1$ bestimmte Ebene zugeordnet. — Haben die involutorischen Regelschaaren (84) zwei Involutionsaxen f, g mit einander gemein, so ist jede dieser Geraden eine Ordnungslinie des Systems, indem die beiden involutorischen Regelschaaren.

von jeder der Regelfläche sich nicht anschmiegenden Ebene U, welche durch irgend eine von den Geraden f, g geht, in einem und demselben in dem involutorischen Systeme enthaltenen involutorischen Punktgebilde II. Ordnung geschnitten werden, daher die Ebene U sich selbst zugeordnet.

aus jedem ausserhalb der Regelfläche liegenden Punkte, welcher der einen oder andern von den beiden Geraden f, g angehört, durch einen und denselben in dem involutorischen Systeme enthaltenen involutorischen Ebenenbüschel II. Ordnung projicirt werden, daher der Punkt S sich selbst zugeordnet ist.

Hat die eine $a a_1 . b b_1 \ldots$ von den beiden involutorischen Regelschaaren zwei Ordnungselemente m, n, die andere aber keine Ordnungselemente, so ist in dem involutorischen Systeme kein Punkt und keine Ebene sich selbst zugeordnet. Denn jedem Punkte mp des geraden Gebildes m ist ein anderer Punkt $m p_1$ desselben, folglich jeder Ebene, welche die Gerade m schneidet, eine andere Ebene zugeordnet. Eben so ist jeder Ebene mp des Ebenenbüschels m eine andere Ebene $m p_1$ desselben und daher auch jedem ausserhalb der Geraden m liegenden Punkte ein anderer Punkt zugeordnet.

103. Durch zwei involutorische Regelschaaren $a a_1 . b b_1 \ldots$, $p p_1 . q q_1 \ldots$, von welchen jede die Leitschaar der andern ist, sind ein involutorisches System und ein gewöhnliches Polarsystem bestimmt, so dass sowohl in dem einen als auch in dem andern dieser Systeme die beiden involutorischen Regelschaaren enthalten sind. Wenn nun irgend einem Elemente P in dem ersten Systeme das Element P_1, im zweiten das Element P_2 und in dem Polarsysteme, dessen Ordnungsfläche die Regelfläche ist, das Element P_3 zugeordnet ist, so ist in dem ersten Systeme dem Elemente P_2 das Element P_3, im zweiten dem Elemente P_1 das Element P_3 und im dritten dem Elemente P_1 das Element P_2 zugeordnet. Fallen zwei der Elemente P, P_1, P_2, P_3 in einander, so fallen auch die beiden übrigen in einander. Wenn endlich das Element P in zweien der drei Systeme sich selbst zugeordnet ist, so ist es auch im dritten sich selbst zugeordnet.

In dem involutorischen Systeme ist dem Punkte ap der Punkt $a_1 p_1$ und der Ebene $a_1 p_1$ die Ebene ap zugeordnet, während in dem erstern Polarsysteme dem Punkte ap die Ebene $a_1 p_1$ und

dem Punkte $a_1 p_1$ die Ebene ap, im letztern aber dem Punkte ap die Ebene ap und dem Punkte $a_1 p_1$ die Ebene $a_1 p_1$ zugeordnet ist. Da nun jede der Regelfläche sich nicht anschmiegende Ebene durch drei Punkte, welche sie mit der Regelfläche gemein hat, bestimmt ist, jeder ausserhalb der Regelfläche liegende Punkt aber als Schnittpunkt von drei dieser Fläche sich anschmiegenden Ebenen und jede Gerade als Träger von Punkten oder als Schnittlinie von Ebenen betrachtet werden kann, so folgt, dass der obige Satz für jedes Element P gibt. Die Gerade, welche den Punkt ap mit dem Punkte $a_1 p_1$ verbindet, ist in dem involutorischen Systeme sich selbst, in den beiden Polarsystemen aber der Schnittlinie der Ebenen ap, $a_1 p_1$ zugeordnet, welche in jenem Systeme ebenfalls sich selbst zugeordnet ist.

104. Durch eine involutorische Regelschaar $aa_1 . bb_1 . cc_1 \ldots$ ist ein involutorisches System $a_1 a . bb_1 . cc_1 \ldots$ bestimmt, in welchem nämlich die involutorische Regelschaar enthalten und jeder Leitstrahl derselben sich selbst zugeordnet ist.

Es seien p, q, r irgend drei Leitstrahlen der gegebenen Regelschaar. Bezieht man nun zwei räumliche Systeme collineär so auf einander, dass den Geraden a, a_1, b, p, q, r des einen Systems die Geraden a_1, a, b_1, p, q, r des andern entsprechen, so hat man das im Satze erwähnte involutorische System. Dem Punkte ap ist der Punkt $a_1 p$, der Ebene ap die Ebene $a_1 p$, dem Schnittpunkte der drei Ebenen ap, bq, cr der Schnittpunkt der drei Ebenen $a_1 p$, $b_1 q$, $c_1 r$ und der durch die drei Punkte ap, bq, cr bestimmten Ebene die durch die drei Punkte $a_1 p$, $b_1 q$, $c_1 r$ gehende Ebene zugeordnet.

Enthält die involutorische Regelschaar zwei sich selbst zugeordnete Gerade m, n, so ist jede dieser Geraden eine Ordnungslinie des Systems, indem, was auch p für ein Leitstrahl der Regelschar sein mag, jeder von den beiden Punkten mp, np und jede von den beiden Ebenen mp, np sich selbst zugeordnet ist. Hat aber die gegebene involutorische Regelschaar keine Ordnungselemente, so ist in dem involutorischen Systeme kein Punkt und keine Ebene sich selbst zugeordnet. Denn jedem Punkte der Geraden p ist ein anderer Punkt derselben, demnach jeder Ebene, welche die Gerade p schneidet, eine andere Ebene zugeordnet. Eben so ist jeder

Ebene des Ebenenbüschels p eine andere Ebene desselben und also auch jedem ausserhalb der Geraden p liegenden Punkte ein anderer Punkt zugeordnet.

105. Durch eine involutorische Regelschaar $aa_1.bb_1...$ und ein Element P, welches weder in dem involutorischen Systeme $aa_1.bb_1...$ noch in dem Nullsysteme $aa_1.bb_1...$ noch in dem durch die Regelfläche bestimmmten gewöhnlichen Polarsysteme sich selbst zugeordnet ist, sind drei andere Elemente P_1, P_2, P_3 bestimmt, so dass in dem ersten der erwähnten Systeme dem Elemente P das Element P_1 und dem Elemente P_2 das Element P_3, im zweiten dem Elemente P das Element P_2 und dem Elemente P_1 das Element P_3, im dritten endlich dem Elemente P das Element P_3 und dem Elemente P_1 das Element P_2 zugeordnet ist. Jedes Element, welches in irgend einem aber auch nur in einem der drei Systeme sich selbst zugeordnet ist, ist in den beiden übrigen Systemen einem und demselben andern Elemente zugeordnet, welches in jenem Systeme ebenfalls sich selbst zugeordnet ist. Ist ein Element in zweien der drei Systeme sich selbst zugeordnet, so ist es auch im dritten sich selbst zugeordnet.

Je zwei zusammengehörige Involutionsaxen der involutorischen Regelschaar sind sowohl in dem Nullsysteme als auch in dem gewöhnlichen Polarsysteme einander zugeordnet, daher nicht nur jeder Leitstrahl der involutorischen Regelschaar sondern auch jede Involutionsaxe derselben ein Leitstrahl des involutorischen Systems und jeder Leitstrahl dieses Systems entweder ein Leitstrahl der involutorischen Regelschaar oder eine Involutionsaxe derselben ist. Je zwei in dem involutorischen Systeme einander zugeordnete

Ebenen sind in dem Polarsysteme einander conjugirt, indem der Pol einer jeden der Nullpunkt der andern ist, mithin in der andern liegt. Und wenn zwei Ebenen, deren Schnittlinie ein ausserhalb der Regelfläche liegender Leitstrahl des involutorischen Systems ist, in dem Polarsysteme einander conjugirt

Punkte sind in dem Polarsysteme einander conjugirt, indem die Polare eines jeden die Nullebene des andern ist, also durch den andern geht. Und wenn zwei Punkte, welche einem und demselben ausserhalb der Regelfläche liegenden Leitstrahle des involutorischen Systemes angehören, in dem Polarsysteme einander

sind, so sind sie in dem involutorischen Systeme einander zugeordnet.

conjugirt sind, so sind sie in dem involutorischen Systeme einander zugeordnet.

106. Durch drei Gerade p, q, r, welche einer und derselben Regelschaar angehören, und eine vierte Gerade s, welche entweder die Regelfläche in zwei Punkten schneidet oder mit derselben gar keinen Punkt gemein hat, ist eine involutorische Regelschaar $a a_1 . b b_1 \ldots$, von welcher die Regelschaar pqr die Leitschaar und die Gerade s eine Involutionsaxe ist, und mithin auch (105) ein involutorisches System $a a_1 . b b_1 \ldots$ bestimmt, von welchem die vier gegebenen Geraden Leitstrahlen sind.

Wenn die Gerade s die gegebene Regelfläche und also auch zwei Gerade m, n der Regelschaar $a a_1 b$ schneidet, so hat das involutorische System zwei Ordnungslinien m, n. Giebt es aber keine Gerade, welche die vier gegebenen Geraden schneidet, so ist in dem involutorischen Systeme kein Punkt und keine Ebene sich selbst zugeordnet.

107. Jedes geschaart-involutorische System enthält unendlich viele involutorische Regelschaaren, deren Leitstrahlen sämmtlich Leitstrahlen des Systems sind, so wie auch unendlich viele involutorische Regelschaaren, deren jede von einer andern in dem Systeme enthaltenen involutorischen Regelschaar die Leitschaar ist.

Denn je zwei einander zugeordnete gerade Gebilde EFGH..., $E_1 F_1 G_1 H_1 \ldots$, welche nicht in einerlei Ebene liegen, erzeugen eine zu ihnen perspektivische Regelschaar, deren Gerade sämmtlich Leitstrahlen des Systems sind, und welche daher von einer im Systeme enthaltenen iuvolutorischen Regelschaar die Leitschaar ist. Da ferner der Wurf EFGH auch zu dem Wurfe $F_1 E_1 H_1 G_1$ projektivisch ist, folglich auch die Geraden e, e_1, g, g_1, welche die Punkte E, F, G, H beziehlich mit den Punkten F_1, E_1, H_1, G_1 verbinden, einer und derselben Regelschaar angehören und den Geraden e, g die Geraden e_1, g_1 zugeordnet sind, so ist auch $e e_1 . g g_1 \ldots$ eine in dem Systeme enthaltene involutorische Regelschaar, welche aber von einer andern in demselben enthaltenen involutotischen Regelschaar die Leitschaar ist.

Alle Leitstrahlen eines geschaart-involutorischen Systems, welche eine und dieselbe Gerade, die mit der ihr zugeordneten Ge-

raden nicht in einerlei Ebene liegt, schneiden, gehören nach dem Obigen einer und derselben Regelschaar an. Durch je drei Leitstrahlen p, q r des Systems, von welchen keine zwei sich schneiden, ist eine Regelschaar p q r bestimmt, deren Gerade sämmtlich Leitstrahlen des Systems sind, und welche daher von einer im Systeme enthaltenen involutorischen Regelschaar die Leitschaar ist. — Wenn in einem involutorischen Systeme die Gerade a der Geraden a_1 zugeordnet, die Gerade h aber entweder ein Leitstrahl oder eine Ordnungslinie des Systems ist und keine zwei von den drei Geraden a, a_1, h in einerlei Ebene liegen, so ist h h . a a_1... eine im Systeme enthaltene involutorische Regelschaar, welche im erstern Falle von einer andern im Systeme enthaltenen involutorischen Regelschaar die Leitschaar ist, während im letztern Falle alle Leitstrahlen der Regelschaar h a a_1 Leitstrahlen des Systems sind.

108. Ein geschaart-involutorisches Systems hat entweder zwei nicht in einerlei Ebene liegende Ordnungslinien m, n, oder es ist in demselben kein Punkt und keine Ebene sich selbst zugeordnet, je nachdem nämlich (104) irgend eine in dem Systeme enthaltene involutorische Regelschaar, deren Leitstrahlen sämmtlich Leitstrahlen des Systems sind, zwei Ordnungselemente m, n oder keine Ordnungselemente hat. Ist eine in dem Systeme enthaltene involutorische Regelschaar von einer andern im Systeme enthaltenen involutorischen Regelschaar die Leitschaar, so hat (102) im erstern Falle entweder jedes dieser Gebilde zwei Leitstrahlen des Systems zu Ordnungselementen oder es hat keines derselben zwei Ordnungselemente, während im letztern Falle das eine von den beiden involutorischen Gebilden zwei Ordnungselemente das andere aber keine solche Elemente hat.

Hat ein involutorisches System zwei Ordnungslinien, so ist jede Ebene, welche durch eine dieser Geraden geht, der Träger eines in dem involutorischen räumlichen Systeme enthaltenen involutorischen ebenen Systems und jeder Punkt, welcher in irgend einer von den beiden Ordnungslinien liegt, der Mittelpunkt eines in dem involutorischen räumlichen Systeme enthaltenen involutorischen Strahlenbündels, daher in dem involutorischen räumlichen Systeme unendlich viele involutorische Elementargebilde jeder Art enthalten sind und jedes in ihm enthaltene involutorische Elemen-

targebilde, welches keine Regelschar ist, zwei Ordnungselemente hat. Jede Gerade, welche beide Ordnungslinien schneidet, ist ein Leitstrahl des Systems, während jede Gerade, welche entweder mit keiner von den beiden Ordnungslinien einen Punkt gemein hat oder nur die eine schneidet, einer andern Geraden zugeordnet ist. Im erstern dieser Fälle sind die einander zugeordneten Geraden durch die beiden Ordnungslinien harmonisch getrennt, durch welche auch je zwei einander zugeordnete Punkte und je zwei einander zugeordnete Ebenen harmonisch getrennt sind. Im letztern Falle, wenn nämlich die einander zugeordneten Geraden sich schneiden, sind sie durch die Ordnungslinie, welche ihren Schnittpunkt enthält und mit ihnen in einerlei Ebene liegt, und den in dieser Ebene befindlichen Punkt der andern Ordnungslinie harmonisch getrennt. Das involutorische System, dessen Ordnungslinien die Geraden m, n sind, kann auch, da es durch diese Linien bestimmt ist, durch (m, n) bezeichnet werden.

Ist in einem involutorischen Systeme kein Punkt und keine Ebene sich selbst zugeordnet, so liegen weder zwei einander zugeordnete Gerade noch zwei Leitstrahlen des Systems in einerlei Ebene, daher durch jeden Punkt nur ein Leitstrahl des Systems geht und in jeder Ebene nur ein Leitstrahl desselben liegt. Jedes in dem Systeme enthaltene involutorische Elementargebilde, welches keine Regelschaar ist, ist entweder ein Punktgebilde oder ein Ebenenbüschel I. Ordnung, in welchem jedes Elementenpaar durch jedes andere Elementenpaar getrennt ist. Durch je drei Leitstrahlen p, q, r des Systems ist eine Regelschaar p q r bestimmt, deren Gerade sämmtlich Leitstrahlen des Systems sind. Da nun durch jeden Punkt nur ein Leitstrahl des Systems geht, mithin die Regelfläche pqr mit keinem ausserhalb derselben liegenden Leitstrahle des Systems einen Punkt gemein hat, so folgt, dass je zwei einander zugeordnete Gerade, welche weder Leitstrahlen der Regelschaar pqr sind noch die Regelfläche schneiden, auf einerlei Seite derselben liegen. Hat eine andere Regelschaar stu, deren Gerade sämmtlich Leitstrahlen des Systems sind, mit der erstern zwei Gerade gemein, so wird durch diese jede von den beiden Regelflächen in zwei Theile getheilt, welche auf entgegengesetzten Seiten der andern liegen. Haben aber die Regelschaaren pqr, stu nur eine

Gerade mit einander gemein, so berühren sich die Regelflächen in dieser Geraden, da sie keinen ausserhalb derselben liegenden Punkt mit einander gemein haben. Wenn endlich die Regelschaaren pqr, stu keine Gerade mit einander gemein haben, so haben auch die beiden Regelflächen keinen Punkt mit einander gemein.

109. Wenn $aa_1 . bb_1 \ldots$, $pp_1 . qq_1 \ldots$ zwei involutorische Regelschaaren sind, von welchen jede die Leitschaar der andern ist, und dem Elemente P in dem involutorischen Systeme $aa_1 . bb_1 \ldots$ das Element P_1, in dem involulorischen Systeme $pp_1 . qq_1 \ldots$ das Element P_2 und in dem involutorischen Systeme, in welchem (102) die beiden involutorischen Regelschaaren enthalten sind, das Element P_3 zugeordnet ist, so ist auch in dem ersten Systeme dem Element P_2 das Element P_3, im zweiten dem Elemente P_1 das Element P_3 und im dritten dem Element P_1 das Element P_2 zugeordnet. Da nämlich der Satz, wie man sich leicht überzeugt, für jedes Element P gilt, welches entweder in der Regelfläche liegt oder derselben sich anschmiegt, so folgt, wie in 103, dass er auch für jedes andere Element gelte. Hat jede von den beiden involutorischen Regelschaaren zwei Ordnungselemente, so hat auch jedes der drei involutorischen Systeme zwei Ordnungslinien und zwar sind diese drei Paar Ordnungslinien die drei Paar Gegenkanten eines Tetraeders. In jedem andern Falle hat nur das eine der drei Systeme zwei Ordnungslinien.

Durch jedes Element Q, welches weder in dem involutorischen Systeme $aa_1 . bb_1 \ldots$, noch in dem Nullsysteme $pp_1\, qq_1 \ldots$, noch in dem gewöhnlichen Polarsysteme, in welchem die beiden involutorischen Regelschaaren enthalten sind, sich selbst zugeordnet ist, sind auch drei andere Elemente Q_1, Q_2, Q_3 bestimmt, so dass in dem ersten dieser Systeme sowohl die Q, Q_1 als auch die Elemente Q_2, Q_3, im zweiten sowohl die Elemente Q, Q_2 als auch die Elemente Q_1, Q_3 und im dritten sowohl die Elemente Q, Q_3 als auch die Elemente Q_1, Q_2 einander zugeordnet sind. Ist ein Element S in irgend einem der drei Systeme sich selbst zugeordnet, so ist es entweder in den beiden übrigen einem und demselben andern Elemente zugeordnet, welches in jenem Systeme ebenfalls sich selbst zugeordnet ist, oder es ist das Element S in jedem der drei Systeme sich selbst zugeordnet.

110. Wenn p, q, r, s, t fünf Leitstrahlen eines und desselben

involutorischen Systems sind, welches keine Ordnungslinien hat, und die Geraden s, t ausserhalb der Regelfläche pqr und zwar auf einerlei Seite derselben liegen, so giebt es zwei Regelflächen, deren jede durch die beiden Geraden s, t geht und die Regelfläche pqr in einer Geraden der Regelschaar pqr berührt.

Es sei U irgend eine durch die Gerade s gehende Ebene, so schneidet diese die Regelfläche pqr in einer Curve K, von welcher zwei Tangenten f, g durch den Punkt Ut gehen. Sind nun m, n diejenigen Geraden der Regelschaar pqr, welche beziehlich die Geraden f, g schneiden, so sind (108) mst, nst die im Satze erwähnten Regelflächen. — Je zwei Gerade der Regelschaar pqr, welche durch die Geraden m, n harmonisch getrennt sind, liegen mit den beiden Geraden s, t in einer und derselben Regelfläche, weil alle Leitstrahlen des involutorischen Systems, welche eine und dieselbe Gerade schneiden, einer und derselben Regelschaar angehören. Sind zwei Leitstrahlen s, u des involutorischen Systems durch die Regelfläche pqr getrennt, so kann man zwar auch die Geraden der Regelschaar pqr involutorisch so paaren, dass je zwei einander zugeordnete Gerade mit den beiden Geraden s, u in einer und derselben Regelfläche liegen; die involutorische Regelschaar hat aber in diesem Falle keine Ordnungselemente. Uebrigens hängen mit dem obigen Satze noch nachstehende zusammen:

Haben zwei Regelschaaren pqr, pqs zwei Gerade p, q aber keinen Leitstrahl mit einander gemein, so gehen durch je zwei auf einerlei Seite der einen Regelfläche liegende Gerade s, t der andern zwei Regelflächen, deren jede die erstere in einer Geraden der Regelschaar pqr berührt. Denn die Gerade t ist ein Leitstrahl des involutorischen Systems, welches (106) durch die vier Geraden p, q, r, s bestimmt ist. — Haben zwei Regelschaaren pst, pqr eine Gerade p mit einander gemein, in welcher alle gemeinschaftlichen Punkte der beiden Regelflächen liegen, so geht durch je zwei andere Gerade s, t der einen Regelschaar noch eine Regelfläche, welche die andere Regelfläche in einer Geraden der Regelschaar pqr berührt. Denn in dem durch die vier Leitstrahlen p, q, r, s bestimmten involutorischen Systeme ist jeder Geraden, welche die Regelfläche pqr in einem Punkte der Geraden p berührt und die Gerade s schneidet, folglich ein Leitstrahl der Regelschaar pst ist,

ein anderer Leitstrahl dieser Regelschaar zugeordnet, woraus man schliessen kann, dass auch jede Gerade der Regelschaar $p s t$ ein Leitstrahl des erwähnten Systems ist.

111. Wenn $a a_1 b c \ldots$, $a_1 a b_1 c_1 \ldots$ zwei zu einander projektivische Regelschaaren sind und auch die Geraden b, b_1, c, c_1 einer und derselben Regelschaar angehören, so ist in dem involutorischen Systeme $b b_1 . c c_1 \ldots$ der Geraden a die Gerade a_1 zugeordnet.

Wenn nämlich die Geraden a, a_1 der Regelschaar $b b_1 c$ angehören, so ist $a a_1 . b b_1 . c c_1$ eine Involution. Wenn aber die Geraden a, a_1 ausserhalb der Regelfläche $b b_1 c$ liegen, so enthält jede dieser Fläche sich nicht anschmiegende Ebene U, welche durch die Gerade a_1 geht, zwei in einem Punkte der Geraden a sich schneidende Gerade, von welchen die eine f ein Leitstrahl der Regelschaar $a b c$ und die andere g ein Leitstrahl der Regelschaar $a b_1 c_1$ ist. Da nun der Wurf $f(a a_1 b c)$ zu dem Wurfe $g(a_1 a b_1 c_1)$ und also auch zu dem Wurfe $g(a a_1 c_1 b_1)$ projektivisch ist, so liegt der Schnittpunkt P der Geraden, welche die Punkte $U b$, $U c$ beziehlich mit den Punkten $U c_1$, $U b_1$ verbinden, in der Geraden a_1. Da ferner die Gerade, welche den Punkt $U a$ mit dem Punkte P verbindet, die Involutionsaxe der involutorischen Curve ist, in welcher die Ebene U die involutorische Regelschaar $b b_1 . c c_1 \ldots$ schneidet, so ist sie auch eine Involutionsaxe dieser involutorischen Regelschaar und daher ein Leitstrahl des involutorischen Systems $b b_1 . c c_1 \ldots$. Da endlich die Punkte $U a$, P in Hinsicht auf die erwähnte Curve und also auch in Hinsicht auf die Regelfläche $b b_1 c$ einander conjugirt sind, so ist (105) in dem involutorischen Systeme $b b_1 . c c_1 \ldots$ dem Punkte $U a$ der Punkt P und so jedem Punkte der Geraden a ein Punkt der Geraden a_1, folglich der Geraden a die Gerade a_1 zugeordnet.

112. Durch vier Gerade a, a_1, b, b_1, welche nicht von einer und derselben fünften Geraden geschnitten werden, sind zwei Gerade bestimmt, welche nämlich sowohl durch die beiden erstern als auch durch die beiden letztern der vier gegebenen Geraden harmonisch getrennt sind.

Nach 100 enthält die Regelschaar $a a_1 b$ eine Gerade c und die Regelschaar $a_1 a b_1$ eine Gerade c_1, so dass der Wurf $a a_1 b c$ zu dem Wurfe $a_1 a b_1 c_1$ projektivisch und $b b_1 . c c_1 \ldots$ eine involu-

terische Regelschaar ist, welche zwei Ordnungselemente m, n hat. Da nun (111) in dem involutorischen Systeme $b b_1 . c c_1 \ldots$, dessen Ordnungslinien die Geraden m, n sind, der Geraden a die Gerade a_1 zugeordnet ist, so sind die Geraden m, n auch durch die Geraden a, a_1 harmonisch getrennt. Und wenn zwei Gerade s, t sowohl durch die Geraden a, a_1 als auch durch die Geraden b, b_1 harmonisch getrennt sind, so ist in dem involutorischen Systeme (s, t) der Regelschaar $a a_1 b$ die Regelschaar $a_1 a b_1$ und also auch, da $a a_1 b c \barwedge a_1 a b_1 c_1$ ist, der Geraden c die Gerade c_1, mithin jede der Geraden m, n sich selbst zugeordnet. Wären nun s, t zwei von m, n verschiedene Gerade und also m, n zwei Leitstrahlen des Systems (s, t), so wären m, n, s, t vier Kanten eines und desselben Tetraeders, dessen beide übrigen Kanten (27) sowohl die Geraden a, a_1 als auch die Geraden b, b_1 schneiden müssten, was gegen die Annahme ist. Es giebt also ausser den Geraden m, n nicht noch zwei Gerade, welche durch die Geraden a, a_1 und zugleich durch die Geraden b, b_1 harmonisch getrennt sind.

Bemerkt wird noch, dass alle Geraden der Regelschaaren $a a_1 b$, $a a_1 b_1$, $b b_1 c$ und also auch die Geraden m, n Leitstrahlen desjenigen involutorischen Systems sind, welches (106) durch die vier Leitstrahlen a, a_1, b, b_1 bestimmt ist.

113. In jedem geschaart-involutorischen Systeme Σ, welches keine Ordnungslinien hat, sind durch vier Leitstrahlen a, a_1, b, b_1 zwei Leitstrahlen bestimmt, welche nämlich sowohl durch die beiden erstern als auch durch die beiden letztern der vier gegebenen Leitstrahlen harmonisch getrennt sind.

Da durch jeden Punkt nur ein Leitstrahl des Systems Σ geht, so haben die Regelfläche $a a_1 b$ und die Gerade b_1 entweder gar keinen Punkt mit einander gemein, in welchem Falle der Satz aus dem vorigen folgt, oder es gehören die vier Geraden a, a_1, b, b_1 einer und derselben Regelschaar an. Enthält nun die involutorische Regelschaar $a a_1 . b b_1 \ldots$ zwei sich selbst zugeordnete Gerade m, n, so sind diess die im Satze erwähnten Leitstrahlen des involutorischen Systems Σ. Je zwei ausserhalb der Regelfläche liegende Gerade, welche sowohl durch die Geraden a, a_1 als auch durch die Geraden b, b_1 harmonisch getrennt sind, schneiden (78) die Geraden m, n und sind daher keine Leitstrahlen des involutorischen

Systems Σ. Wenn aber die involutorische Regelschaar $a a_1 . b b_1 \ldots$ keine Ordnungselemente hat, so hat sie (84) mit der in dem Systeme Σ enthaltenen involutorischen Regelschaar, von welcher sie die Leitschaar ist, zwei aber auch nur zwei Involutionsaxen m, n gemein, so dass es also auch in diesem Falle nur zwei Gerade m, n giebt, welche sowohl durch die Geraden a, a_1 als auch durch die Geraden b, b_1 harmonisch getrennt und zugleich Leitstrahlen des involutorischen Systems Σ sind.

114. Wenn p, q, r irgend drei Leitstrahlen eines geschaart-involutorischen Systems sind, welches keine Ordnungslinien hat, und zwei gerade Gebilde ABC, EFG, von welchen das erstere in der Geraden p, das letztere aber in der Geraden q liegt, in Hinsicht auf die Gerade r in einem und demselben Sinne beschrieben sind, so sind sie auch (55) in Hinsicht auf jeden vierten Leitstrahl des Systems in einem und demselben Sinne beschrieben, daher man sagen kann, dass in dem involutorischen Systeme der Sinn ABC mit dem Sinne EFG und eben so der Sinn q(ABC) mit dem Sinne p(EFG) übereinstimme. Wenn ferner (62) eine Regelschaar abc, deren Leitstrahlen s, t, u u. s. w. sämmtlich Leitstrahlen des Systems sind, im Sinne ABC beschrieben ist, so ist sie auch im Sinne EFG so wie auch im Sinne q(ABC) und im Sinne p(EFG) beschrieben.

Denn nach der Annahme und nach dem Obigen sind die drei geraden Gebilde t(abc), ABC, EFG in Hinsicht auf die Gerade s in einem und demselben Sinne beschrieben, daher das erste und zweite auch in Hinsicht auf die Gerade q, das erste und dritte aber auch in Hinsicht auf die Gerade p in einem und demselben Sinne beschrieben sind.

115. Wenn ein geschaart-involutorisches System keine Ordnungslinien hat und zwei Regelschaaren abc, efg, deren Leitstrahlen sämmtlich Leitstrahlen des Systems sind, in Hinsicht auf irgend einen Leitstrahl p desselben in einem und demselben Sinne beschrieben sind, so sind sie auch in Hinsicht auf jeden andern Leitstrahl q des Systems in einem und demselben Sinne beschrieben, daher man sagen kann, dass in dem involutorischen Systeme der Sinn abc mit dem Sinne efg übereinstimme.

Es seien A, B, C drei Punkte der Geraden p und E, F, G

drei Punkte der Geraden q, so dass (114) in dem involutorischen Systeme der Sinn A B C mit dem Sinne E F G übereinstimmt. Sind nun die beiden Regelschaaren a b c, e f g im Sinne A B C beschrieben, so sind auch beide im Sinne EFG so wie auch im Sinne q(ABC) und im Sinne p(EFG), also in Hinsicht auf jeden Leitstrahl des involutorischen Systems, man mag denselben als Träger von Punkten oder als Schnittlinie von Ebenen betrachten, in einem und demselben Sinne beschrieben.

---

§. 7.

Imaginäre Elemente.

116. Wenn man mit einem involutorischen einförmigen Gebilde, $AA_1 . BB_1 \ldots$, welches keine Ordnungselemente hat, einen bestimmten in demselben enthaltenen Sinn ABA_1 verbindet, so hat man ein imaginäres Element ABA_1B_1 I. Art, nämlich einen imaginären Punkt, oder eine imaginäre Gerade I. Art oder eine imaginäre Ebene, je nachdem das einförmige Gebilde ein Punktgebilde oder ein Strahlenbüschel oder ein Ebenenbüschel ist. Verbindet man mit demselben involutorischen Gebilde den entgegengesetzten Sinn, so erhält man das imaginäre Element A_1BAB_1, welches dem erstern conjungirt heissen soll. Elemente werden aber dergleichen Verbindungen zweier Begriffe nur aus dem Grunde genannt, weil sie häufig die Stelle von wirklichen (reellen) Elementen vertreten.

Ist von einem imaginären Elemente ABA_1B_1 I. Art die Rede, so versteht es sich von selbst, dass A, B, A_1, B_1 vier reelle Elemente eines und desselben einförmigen Gebildes und in diesem die Elemente A, A_1 durch die Elemente B, B_1 getrennt sind. Das imaginäre Element EFE_1F_1 fällt mit dem erstern zusammen, so dass also ABA_1B_1, EFE_1F_1 nur verschiedene Darstellungen eines und desselben imaginären Elements sind, wenn das involutorische Gebilde $EE_1 . FF_1 \ldots$ mit dem involutorischen Gebilde $AA_1 . BB_1 \ldots$ identisch ist und überdiess der Sinn EFE_1 mit dem Sinne ABA_1 übereinstimmt. Namentlich kann also das imaginäre Element ABA_1B_1 auch durch BA_1B_1A oder A_1B_1AB oder B_1ABA_1 und das demselben conjungirte Element A_1BAB_1 auch durch BAB_1A_1 oder AB_1A_1B oder B_1A_1BA dargestellt werden.

117. Verbindet man mit einem geschaart-involutorischen Systeme $a a_1 . b b_1 \dots$, welches keine Ordnungslinien hat, einen bestimmten in der involutorischen Regelschaar $a a_1 . b b_1 \dots$ enthaltenen Sinn $a b a_1$, so hat man eine imaginäre Gerade $a b a_1 b_1$ II. Art. Verbindet man mit demselben Systeme den entgegengesetzten Sinn, so erhält man die der erstern Geraden conjungirte Gerade $a_1 b a b_1$.

Ist von einer imaginären Geraden $a b a_1 b_1$ II. Art die Rede, so versteht es sich von selbst, dass a, b, a_1, b_1 vier reelle Gerade einer und derselben Regelschaar und in dieser die Geraden a, a_1 durch die Geraden b, b_1 getrennt sind. Die imaginäre Gerade $e f e_1 f_1$ fällt mit der erstern zusammen, so dass also $a b a_1 b_1$, $e f e_1 f_1$ nur verschiedene Darstellungen einer und derselben imaginären Geraden sind, wenn das involutorische System $e e_1 . f f_1 \dots$ mit dem involutorisshen Systeme $a a_1 . b b_1 \dots$ identisch ist und überdiess der Sinn $e f e_1$ mit dem Sinne $a b a_1$ übereinstimmt. Namentlich kann also die imaginäre Gerade $a b a_1 b_1$ auch durch $b a_1 b_1 a$ oder $a_1 b_1 a b$ oder $b_1 a b a_1$ und die ihr conjungirte Gerade $a_1 b a b_1$ auch durch $b a b_1 a_1$ oder $a b_1 a_1 b$ oder $b_1 a_1 b a$ dargestellt werden.

Ausser den in dieser und der vorigen Nummer erwähnten imaginären Elementen giebt es keine andern.

118. Die Darstellungen $a b a_1 b_1$, $e f e_1 f_1$ von zwei imaginären Elementen oder auch zwei Darstellungen $a b a_1 b_1$, $e f e_1 f_1$ eines und desselben imaginären Elements sollen zu einander projektivisch heissen, wenn die beiden Würfe $a b a_1 b_1$, $e f e_1 f_1$ zu einander projektivisch sind. Ist ein imaginärrs Element durch einen harmonischen Wurf $a b a_1 b_1$ dargestellt, so soll diese Darstellung desselben eine harmonische heissen. — Unter allen Darstellungen eines und desselben imaginären Elements $g h g_1 h_1$, welche von einem und demselben Elemente e ausgehen, ist eine aber auch nur eine, welche zu einer gegebenen Darstellung $a b a_1 b_1$ eines andern oder auch desselben imaginären Elements projektivisch, und also auch nur eine, welche harmonisch ist.

Ist $g h g_1 h_1$ ein imaginäres Element I. Art, so giebt es (83) zu jedem reellen Elemente e, welches dem einförmigen Gebilde $g h g_1 \dots$ angehört, drei andere reelle Elemente e_1, f, f_1, so dass $e f e_1 f_1$ eine zu $a b a_1 b_1$ projektivische Darstellung des imaginären

Elements $g h g_1 h_1$ ist. Ist $g h g_1 h_1$ eine imaginäre Gerade II. Art, so sind durch jede reelle Gerade e, welche kein Leitstrahl des involutorischen Systems $g g_1 . h h_1 \ldots$ ist, drei andere reelle Gerade e_1, f, f_1 bestimmt, so dass $e f e_1 f_1$ eine zu $a b a_1 b_1$ projektivische Darstellung der imaginären Geraden $g h g_1 h_1$ ist. Alle Leitstrahlen des involutorischen Systems $g g_1 . h h_1 \ldots$, welche die Gerade e schneiden, gehören einer und derselben Regelschaar an, welche von einer in dem Systeme enthaltenen involutorischen Regelschaar $e e_1 . f f_1 \ldots$ die Leitschaar ist.

119. Von einem imaginären Elemente $A B A_1 B_1$ soll gesagt werden, dass es

in dem reellen Elemente u liege, wenn in diesem alle Elemente des involutorischen Gebildes $A A_1 . B B_1 \ldots$ liegen. Jeder imaginäre Punkt liegt daher in **einer** reellen Geraden und in allen den reellen Ebenen, welche in dieser Geraden (dem reellen Träger des imaginären Punkts) sich schneiden.

durch das reelle Element s gehe, wenn durch dieses alle Elemente des involutorischen Gebildes $A A_1 . B B_1 \ldots$ gehen. Jede imaginäre Ebene geht hiernach durch **eine** reelle Gerade und durch alle die reellen Punkte, welche in dieser Geraden (der reellen Axe der imaginären Ebene) sich befinden.

Jede imaginäre Gerade I. Art liegt in einer reellen Ebene und geht durch einen reellen Punkt, während eine imaginäre Gerade II. Art weder in einer reellen Ebene liegt noch durch einen reellen Punkt geht. — Ob man sagt, dass ein Element in einem andern liege oder dass dieses durch jenes gehe, ist ganz einerlei.

Geht ein reelles Element durch das eine von zwei einander conjungirten imaginären Elementen, so geht es auch durch das andere.

Liegt ein reelles Element in dem einen von zwei einander conjungirten imaginären Elementen, so liegt es auch im andern.

120. Von einem imaginären Punkte $A B A_1 B_1$ soll gesagt werden, dass er in der imaginären Ebene $E F E_1 F_1$ liege, wenn entweder der reelle Träger u des imaginären Punkts mit der reellen Axe s der imaginären Ebene zusammenfällt, oder wenn das involutorische gerade Gebilde $A A_1 . B B_1 \ldots$ und der involutorische

Ebenenbüschel $EE_1 . FF_1 \ldots$ zu einander perspektivisch sind und überdiess der Sinn ABA_1 mit dem Sinne EFE_1 übereinstimmt. Im letztern Falle ist zu jeder Darstellung ABA_1B_1 des imaginären Punkts eine Darstellung $s(ABA_1B_1)$ der imaginären Ebene und zu jeder Darstellung EFE_1F_1 der imaginären Ebene eine Darstellung $u(EFE_1F_1)$ des imaginären Punkts perspektivisch.

Ein imaginärer Punkt $AB A_1B_1$ wird aus jeder reellen Geraden s, welche mit ihm nicht in einer und derselben reellen Ebene liegt, durch eine imaginäre Ebene $s(ABA_1B_1)$ projicirt.

Eine imaginäre Ebene $EF E_1F_1$ wird von jeder reellen Geraden u, welche mit der Ebene keinen reellen Punkt gemein hat, in einem imaginären Punkte $u(EFE_1F_1)$ geschnitten.

Anm. So wie hier, so soll auch in der Folge, wenn durch zwei Elemente ein drittes Element bestimmt ist, welches nämlich entweder durch die beiden erstern geht oder in den beiden erstern liegt, gesagt werden, dass im erstern Falle das dritte Element aus jedem der beiden erstern Elemente das andere projicire, im letztern Falle aber die beiden erstern Elemente im dritten sich schneiden.

121. Von einer imaginären Geraden $ghg_1h_1 \ldots$ I. Art soll gesagt werden, dass sie

durch den imaginären Punkt ABA_1B_1 gehe, wenn der involutorische Strahlenbüschel $gg_1 . hh_1 \ldots$ und das involutorische gerade Gebilde $AA_1 . BB_1 \ldots$ zu einander perspektivisch sind und überdiess der Sinn ghg_1 mit dem Sinne ABA_1 übereinstimmt, mithin zu jeder Darstellung des einen von den beiden imaginären Elementen eine Darstellung des andern perspektivisch ist.

in der imaginären Ebene $EF E_1F_1$ liege, wenn der involutorische Strahlenbüschel $gg_1 . hh_1 \ldots$ und der involutorische Ebenenbüschel $EE_1 . FF_1 \ldots$ zu einander perspektivisch sind und überdiess der Sinn ghg_1 mit dem Sinne EFE_1 übereinstimmt, demnach zu jeder Darstellung des einen von den beiden imaginären Elementen eine Darstellung des andern perspektivisch ist.

Jeder imaginäre Punkt $AB A_1B_1$ wird aus jedem reellen Punkte S, welcher mit ihm nicht

Jede imaginäre Ebene $EF E_1F_1$ wird von jeder reellen Ebene U, welche nicht durch die

in einer und derselben reellen Geraden liegt, durch eine imaginäre Gerade $S(ABA_1B_1)$ I. Art, jede imaginäre Gerade $a b a_1 b_1$ I. Art aus jedem reellen Punkte M, welcher mit ihr nicht in einer und derselben reellen Ebene liegt, durch eine imaginäre Ebene $M(a b a_1 b_1)$ projicirt. Dieselbe Ebene projicirt auch die imaginäre Gerade aus der reellen Geraden, welche den reellen Punkt der erstern mit dem Punkte M verbindet.

Zwei imaginäre Gerade I. Art, welche einen imaginären Punkt mit einander gemein haben, liegen in einer und derselben reellen oder imaginären Ebene, je nachdem die Gerade, welche ihre reellen Punkte mit einander verbindet, den reellen Träger jenes imaginären Punktes schneidet oder nicht schneidet.

reelle Axe der erstern Ebene geht, in einer imaginären Geraden $U(EFE_1F_1)$ I. Art, jede imaginäre Gerade $e f e_1 f_1$ I. Art von jeder reellen Ebene V, welche nicht durch den reellen Punkt der imaginären Geraden geht, in einem imaginären Punkte $V(e f e_1 f_1)$ geschnitten. In demselben Punkte schneiden sich auch die imaginäre Gerade und die reelle Gerade, in welcher der reelle Träger der erstern von der Ebene V geschnitten wird.

Zwei imaginäre Gerade I. Art, welche in einer und derselben imaginären Ebene liegen, haben einen reellen oder imaginären Punkt mit einander gemein, je nachdem die Schnittlinie ihrer reellen Träger die reelle Axe jener imaginären Ebene schneidet oder nicht schneidet.

122. Von einer imaginären Geraden $g h g_1 h_1$ II. Art soll gesagt werden, dass sie

durch den imaginären Punkt $A B A_1 B_1$ gehe, wenn das involutorische gerade Gebilde $A A_1 . B B_1 \dots$ in dem involutorischen Systeme $g g_1 . h h_1 \dots$ enthalten ist und überdiess der Sinn $A B A_1$ mit dem Sinne $g h g_1$ übereinstimmt, mithin zu jeder Darstellung $A B A_1 B_1$ des imaginären Punkts unendlich viele Darstel-

in der imaginären Ebene $E F E_1 F_1$ liege, wenn der involutorische Ebenenbüschel $E E_1 . F F_1 \dots$ in dem involutorischen Systeme $g g_1 . h h_1 \dots$ enthalten ist und überdiess der Sinn $E F E_1$ mit dem Sinne $g h g_1$ übereinstimmt, mithin zu jeder Darstellung $E F E_1 F_1$ der imaginären Ebene unendlich viele Darstellungen

lungen der imaginären Geraden perspektivisch sind.

der imaginären Geraden perspektivisch sind.

Es sei a irgend eine reelle Gerade, welche den Träger p des involutorischen Gebildes $AA_1.BB_1\ldots$ im Punkte A schneidet. Es seien ferner q, r noch zwei Leitstrahlen des involutorischen Systems $gg_1.hh_1\ldots$, welche die Gerade a schneiden. Sind nun b, a_1, b_1 diejenigen Leitstrahlen der Regelschaar pqr, welche beziehlich durch die Punkte B, A_1, B_1 gehen, so ist aba_1b_1 eine zu ABA_1B_1 perspektivische Darstellung der imaginären Geraden ghg_1h_1. Eben so giebt es zu jeder reellen Geraden e, welche in der Ebene E liegt und die Gerade EF schneidet, drei andere reelle Gerade f, e_1, f_1, so dass efe_1f_1 eine zu EFE_1F_1 perspektivische Darstellung der imaginären Geraden ghg_1h_1 ist.

123. Eine imaginäre Gerade II. Art und eine reelle Gerade haben entweder einen imaginären Punkt mit einander gemein und liegen in einer und derselben imaginären Ebene, oder sie haben keinen Punkt mit einander gemein und liegen nicht in einerlei Ebene, je nachdem nämlich (122) die reelle Gerade ein Leitstrahl oder kein Leitstrahl des der imaginären Geraden zu Grunde liegenden involutorischen Systems ist. Eine imaginäre Gerade ghg_1h_1 II. Art wird also

von jeder reellen Ebene in einem imaginären Punkte geschnitten, dessen reeller Träger der in der Ebene befindliche Leitstrahl des involutorischen Systems $gg_1.hh_1\ldots$ ist.

aus jedem reellen Punkte durch eine imaginäre Ebene projicirt, deren reelle Axe der durch den Punkt gehende Leitstrahl des involutorischen Systems $gg_1.hh_1\ldots$ ist.

Zwei einander conjungirte imaginäre Gerade II. Art haben keinen Punkt mit einander gemein und liegen auch nicht in einerlei Ebene. Durch vier reelle Gerade, welche nicht von einer und derselben fünften reellen Geraden geschnitten werden, sind (106) zwei einander conjungirte imaginäre Gerade II. Art bestimmt, deren jede die vier gegebenen Geraden schneidet.

124. Von einem reellen Elemente kann man sagen, dass es sich selbst conjungirt sei und daher mit dem ihm conjungirten Elemente zusammen falle. Liegt ein Element in einem andern Elemente, so liegt nach den in diesem § enthaltenen Erklärungen auch

das dem erstern conjungirte Element in dem dem letztern conjungirten Elemente. Wenn daher durch zwei Elemente ein drittes bestimmt ist, welches nämlich entweder in den beiden erstern liegt oder durch die beiden erstern geht, so ist auf dieselbe Weise auch das dem dritten conjungirte Element durch die Elemente bestimmt, welche beziehlich den erstern conjungirt sind.

Aus 118, 120, 121 und 122 folgt noch, dass, wenn das imaginäre Element $A B A_1 B_1$ in dem imaginären Elemente $a b a_1 b_1$ und das reelle Element A in dem reellen Elemente a liegt und die Darstellungen der beiden imaginären Elemente zu einander projektivisch sind, auch die reellen Elemente B, A_1, B_1 beziehlich in den reellen Elementen b, a_1, b_1 liegen.

125. Jeder in einer Geraden befindliche Punkt liegt auch in jeder durch diese Gerade gehenden Ebene.

Es sei $a b a_1 b_1$ eine imaginäre Gerade II. Art, p der reelle Träger eines in ihr liegenden Punkts P und u die reelle Axe einer durch sie gehenden Ebene U. Wenn nun, was man annehmen kann, die reelle Gerade a, von welcher die Darstellung der imaginären Geraden ausgeht, die Geraden p, u schneidet, diese also Leitstrahlen der Regelschaar $a b a_1$ sind, so ist $\dot{p}(a b a_1 b_1)$ eine Darstellung des imaginären Punkts P und $\bar{u}(a b a_1 b_1)$ eine Darstellung der imaginären Ebene U, woraus hervorgeht, dass der Punkt P in der Ebene U liegt. Noch leichter überzeugt man sich von der Richtigkeit des Satzes, wenn die gegebene Gerade eine reelle Gerade oder eine imaginäre Gerade I. Art ist.

126. Durch zwei imaginäre Punkte $A B A_1 B_1$, $A F E_1 F_1$, welche in einer und derselben reellen Ebene aber nicht in einer und derselben reellen Geraden liegen, ist eine imaginäre Gerade I. Art bestimmt, welche die gegebenen Punkte mit einander verbindet.	Durch zwei imaginäre Gerade, welche in einer und derselben reellen Ebene liegen aber nicht durch einen und denselben reellen Punkt gehen, ist ein imaginärer Punkt bestimmt, in welchem die gegebenen Geraden sich schneiden.

Wenn nämlich, was man annehmen kann, die Darstellungen der gegebenen imaginären Punkte vom Schnittpunkte A ihrer reellen Träger ausgehen und zu einander projektivisch sind, so schnei-

den sich die drei Geraden BF, $A_1 E_1$, $B_1 F_1$ in einem und demselben Punkte, aus welchem die beiden imaginären Punkte durch eine und dieselbe imaginäre Gerade I. Art projicirt werden. Und wenn eine Gerade durch die beiden gegebenen Punkte gehen soll, so muss sie eine imaginäre Gerade I. Art sein, deren reeller Punkt S in der Ebene ABF liegt, so dass $S(ABA_1B_1)$ eine zu ABA_1B_1 und also auch (124) eine zu AFE_1F_1 perspektivische Darstellung derselben ist, daher der Punkt S kein anderer Punkt als der Schnittpunkt der Geraden BF, A_1E_1, B_1F_1 sein kann. Auf analoge Weise werden der Satz rechter Hand und die beiden nachstehenden Sätze bewiesen.

Durch zwei imaginäre Gerade, welche durch einen und denselben reellen Punkt gehen aber nicht in einer und derselben reellen Ebene liegen, ist eine imaginäre Ebene bestimmt, in welcher die beiden gegebenen Geraden liegen.

Durch zwei imaginäre Ebenen, welche einen reellen Punkt mit einander gemein haben aber nicht durch eine und dieselbe reelle Gerade gehen, ist eine imaginäre Gerade I. Art bestimmt, in welcher die gegebenen Ebenen sich schneiden.

127. Durch zwei imaginäre Punkte ABA_1B_1, EFE_1F_1, welche nicht in einer und derselben reellen Ebene liegen, ist eine imaginäre Gerade II. Art bestimmt, welche die gegebenen Punkte mit einander verbindet.

Durch zwei imaginäre Ebenen, welche keinen reellen Punkt mit einander gemein haben, ist eine imaginäre Gerade II. Art bestimmt, in welcher die gegebenen Ebenen sich schneiden.

Man kann annehmen, dass die Darstellungen der gegebenen Punkte zu einander projektivisch sind. Bezeichnet man nun die Geraden AE, BF, A_1E_1, B_1F_1 beziehlich durch a, b, a_1, b_1, so stellt aba_1b_1 eine imaginäre Gerade II. Art dar, welche sowohl durch den Punkt ABA_1B_1 als auch durch den Punkt EFE_1F_1 geht. Und wenn eine Gerade durch die beiden gegebenen Punkte geht, so giebt es eine von a ausgehende Darstellung derselben, welche zu ABA_1B_1 und also auch (124) zu EFE_1F_1 perspektivisch, folglich mit aba_1b_1 identisch ist.

128. Durch zwei Punkte P, Q ist eine Gerade PQ bestimmt,

Durch zwei Ebenen P, Q ist eine Gerade PQ bestimmt, in

welche durch beide Punkte geht.

Liegen die Punkte P, Q nicht in einer und derselben reellen Geraden, so ist PQ eine imaginäre Gerade erster oder (127) zweiter Art, je nachdem die Punkte in einer und derselben oder nicht in einer und derselben reellen Ebene liegen.

welcher die Ebenen sich schneiden.

Gehen die Ebenen P, Q nicht durch eine und dieselbe reelle Gerade, so schneiden sie sich in einer imaginären Geraden erster oder zweiter Art, je nachdem sie einen oder keinen reellen Punkt mit einander gemein haben.

129. Haben eine Gerade und eine Ebene mehr als einen Punkt mit einander gemein, so liegt die Gerade in der Ebene. Alle Punkte, welche zwei Ebenen mit einander gemein haben, liegen in der Schnittlinie dieser Ebenen.

Es seien ABA_1B_1, EFE_1F_1 zwei nicht in einer und derselben reellen Ebene liegende imaginäre Punkte und GHG_1H_1 eine imaginäre Ebene, welche durch beide Punkte geht. Wenn nun, was man annehmen kann, die Darstellungen der drei imaginären Elemente zu einander projektivisch sind und die Gerade AE in der Ebene G liegt, so liegen auch (124) die Geraden BF, A_1E_1, B_1F_1 beziehlich in den Ebenen H, G_1, H_1. Da hiernach die von AE ausgehende und zu ABA_1B_1 perspektioische Darstellung der durch die beiden imaginären Punkte bestimmten imaginären Geraden auch zu GHG_1H_1 perspektivisch ist, so folgt, dass die Ebene GHG_1H_1 durch die erwähnte imaginäre Gerade geht. Eben so leicht überzeugt man sich, dass, wenn P, Q zwei in einer und derselben reellen Ebene liegende Punkte sind, nicht nur diese Ebene sondern auch jede andere Ebene, welche durch beide Punkte geht, auch durch die Gerade PQ gehe. Sind also U, V irgend zwei Ebenen und P, Q irgend zwei gemeinschaftliche Punkte derselben, so fällt die Gerade PQ, da sie in jeder von den beiden Ebenen liegt, mit der Geraden UV zusammen, woraus hervorgeht, dass jeder Punkt, welchen die Ebenen mit einander gemein haben, in ihrer Schnittlinie liegt.

130. Durch eine Gerade s und einen ausserhalb derselben liegenden Punkt P ist eine Ebene

Durch eine Ebene U und eine ausserhalb derselben liegende Gerade s ist ein Punkt Us be-

sP bestimmt, welche durch die gegegebene Gerade und durch den gegebenen Punkt geht.

stimmt, in welchem die gegebene Ebene und die gegebene Gerade sich schneiden.

Die Fälle, in welchen eines von den beiden gegebenen Elementen reell ist, sind bereits betrachtet worden. Ist s eine imaginäre Gerade und P ein imaginärer Punkt, dessen reeller Träger p die Gerade s schneidet, so liegen die Geraden s, p entweder in einer und derselben reellen oder (121, 123) in einer und derselben imaginären Ebene. Wenn aber die imaginäre Gerade s von dem reellen Träger des imaginären Punkts P nicht geschnitten wird, so sei H irgend eine durch den Punkt P gehende reelle Ebene, welche die Gerade s in einem imaginären Punkte Q schneidet. Da nun die Ebene, welche die Gerade s aus dem reellen Punkte S der Geraden PQ projicirt, durch den Punkt Q geht, so geht sie auch (129) durch die Gerade SQ und mithin auch durch den Punkt P. Dass es aber nur eine Ebene giebt, welche durch die Gerade s und zugleich durch den Punkt P geht, folgt ebenfalls aus 129.

131. Durch drei Punkte P, Q, R, welche nicht in einer und derselben Geraden liegen, ist (130) eine Ebene PQR bestimmt, welche durch die drei gegebenen Punkte geht, also aus jedem derselben die durch die beiden übrigen bestimmte Gerade projicirt.

Durch die Ebenen P, Q, R, welche nicht durch eine und dieselbe Gerade gehen, ist ein Punkt PQR bestimmt, in welchem die drei Ebenen sich schneiden, also auch jede der drei Ebenen die Schnittlinie die beiden übrigen schneidet.

Zwei Gerade, welche einen Punkt P mit einander gemein haben, liegen auch in einer und derselben Ebene, welche aus jeder von den beiden Geraden jeden von P verschiedenen Punkt der andern projicirt.

Zwei Gerade, welche in einerlei Ebene P liegen, haben auch einen Punkt mit einander gemein, in welchem jede von P verschiedene Ebene, welche durch die eine Gerade geht, die andere schneidet.

132. Aus dem Bisherigen geht hervor, dass die in G. §. 6 enthaltenen Sätze, mit Ausnahme von 75 und 76, sich nicht auf reelle Elemente beschränken, sondern allgemein gelten. Dieselbe

allgemeine Gültigkeit kommt daher auch den in G. §. 7 aufgestellten Sätzen zu, so dass weder in den Aussagen derselben noch in den Beweisen etwas abzuändern ist, wenn nun unter Elementen nicht blos reelle Elemente sondern Elemente überhaupt verstanden werden. — Ein Dreieck, welches in einer imaginären Ebene liegt, hat höchstens eine reelle Seite, während ein imaginäres Dreieck, welches in einer reellen Ebene liegt, zwei reelle Seiten haben kann.

Sind zwei Eckpunkte eines vollständigen ebenen Vierecks den beiden übrigen beziehlich conjungirt, so hat das Viereck zwei reelle und vier imaginäre Seiten, von welchen (124) je zwei einander gegenüberliegende einander conjungirt sind und daher in einem reellen Punkte sich schneiden.

Sind zwei Seiten eines vollständigen ebenen Vierseits den beiden übrigen beziehlich conjungirt, so hat das Vierseit zwei reelle und vier imaginäre Eckpunkte, von welchen je zwei einander gegenüberliegende einander conjungirt sind und also in einer und derselben reellen Geraden liegen.

---

§. 8.

Von der Menge der Elemente.

133. Ein einförmiges Gebilde enthält entweder eine sich schliessende stetige Aufeinanderfolge von reellen Elementen oder nur ein reelles Element oder gar kein reelles Element. Im erstern Falle soll das Gebilde selbst reell heissen, obgleich in demselben auch unendlich viele imaginäre Elemente enthalten sind.

Wenn man die Menge aller in einem und demselben reellen einförmigen Gebilde enthaltenen reellen Elemente durch $n+1$ bezeichnet und mit diesem Ausdrucke, welcher dieselbe Bedeutung auch in den acht folgenden Nummern hat, wie mit einer endlichen Zahl verfährt, so findet man, dass in jedem reellen einförmigen Gebilde n^2-n imaginäre Elemente enthalten sind. Man kann nämlich alle imaginären Elemente des Gebildes von einem und demselben reellen Elemente A aus harmonisch dargestellt sich denken. Da nun das Gebilde n von A verschiedene reelle Elemente und, wenn B irgend eines dieser Elemente ist, auch noch $n-1$ von

A und B verschiedene reelle Elemente enthält, durch drei Elemente A, B, A_1 aber das vierte zu denselben harmonische Element B_1 bestimmt ist, so ergiebt sich für die Menge der in dem Gebilde enthaltenen imaginären Elemente das Produkt $n(n-1)$.

Anm. Die in diesem §. enthaltenen Sätze sollen nur dazu dienen, die unendlich vielen in einem und demselben Grundgebilde enthaltenen Elemente zur klaren Anschauung zu bringen.

134. In jedem reellen ebenen Systeme, dessen Träger nämlich eine reelle Ebene ist, sind n^2+n+1 reelle Punkte und eben so viele reelle Gerade, dann n^4-n imaginäre Punkte und eben so viele imaginäre Gerade enthalten.

In jedem reellen Strahlenbündel, welcher nämlich einen reellen Mittelpunkt hat, sind n^2+n+1 reelle Strahlen und eben so viele reelle Ebenen, dann n^4-n imaginäre Strahlen und eben so viele imaginäre Ebenen enthalten.

In einem und demselben reellen Punkte der Ebene schneiden sich nämlich $n+1$ in ihr liegende reelle Gerade, deren jede noch n reelle Punkte enthält, daher die Anzahl aller reellen Punkte der Ebene $n(n+1)+1$ ist. Eben so ist die Anzahl aller in der Ebene befindlichen reellen Geraden $n(n+1)+1$, da jede derselben in jedem ihrer $n+1$ reellen Punkte von n andern geschnitten wird. Bemerkt man nun noch, dass jedes reelle einförmige Gebilde $n(n-1)$ imaginäre Elemente enthält, so ergiebt sich auch der letztere Theil des Satzes.

Sind M, N die Mittelpunkte von zwei in einer und derselben reellen Ebene liegenden reellen Strahlenbüscheln, so schneiden sich in jedem ausserhalb der Geraden MN liegenden reellen Punkte der Ebene ein reeller Strahl des einen Büschels und ein reller Strahl des andern. Da nun jeder der Büschel n von MN verschiedene reelle Strahlen enthält, so sind in der Ebene n^2 ausserhalb der Geraden MN liegende reelle Punkte enthalten, was mit dem Obigen übereinstimmt.

135. In jedem Strahlenbüschel, welcher in einer reellen Ebene liegt aber einen imaginären Mittelpunkt hat, sind n^2 imaginäre Strahlen und in jeder

In jedem Strahlenbüschel, welcher einen reellen Mittelpunkt hat aber in einer imaginären Ebene liegt, sind n^2 imaginäre Strahlen und in jedem Ebenen-

imaginären Geraden I. Art n^2 imaginäre Punkte enthalten.

Denn jede reelle Ebene projicirt (134) aus jeder in ihr liegenden reellen Geraden n^2 reelle Punkte und aus jedem in ihr liegenden reellen Punkte n^2 reelle Gerade.

büschel, dessen Axe eine imaginäre Gerade I. Art ist, n^2 imaginäre Ebenen enthalten.

Denn jede reelle Gerade wird in jedem ihrer reellen Punkte von n^2 reellen Ebenen und jede reelle Ebene in jedem ihrer reellen Punkte von n^2 reellen Geraden geschnitten.

136. Jede imaginäre Gerade u II. Art wird von n^2+1 reellen Geraden geschnitten, daher in jeder imaginären Geraden II. Art n^2+1 imaginäre Punkte liegen und eben so viele imaginäre Ebenen sich schneiden.

Jede reelle Ebene enthält nämlich eine reelle Gerade h, welche die Gerade u schneidet, und wird in jedem ihrer n^2 reellen Punkte, welche ausserhalb der Geraden h liegen, von einer reellen Geraden geschnitten, welche auch die Gerade u schneidet.

137. Ein Strahlenbüschel, welcher in einer imaginären Ebene U liegt und einen imaginären Mittelpunkt hat, enthält entweder einen reellen Strahl und n^2 imaginäre Strahlen II. Art oder $n+1$ imaginäre Strahlen erster und n^2-n imaginäre Strahlen zweiter Art, je nachdem nämlich die reelle Axe p der Ebene U durch den Mittelpunkt des Büschels oder nicht durch diesen Punkt geht.

Im erstern Falle wird der Strahlenbüschel von jeder nicht durch seinen Mittelpunkt gehenden reellen Ebene in einem imaginären geraden Gebilde geschnitten, dessen reeller Punkt in dem reellen Strahle p des Büschels liegt, während jeder der n^2 imaginären Punkte des geraden Gebildes aus dem Mittelpunkte des Büschels durch einen imaginären Strahl II. Art projicirt wird. Im letztern Falle ist ein Strahl des Büschels eine imaginäre Gerade erster oder zweiter Art, je nachdem er die Gerade p in einem ihrer $n+1$ reellen oder in einem ihrer n^2-n imaginären Punkte schneidet. — Jedes einförmige Gebilde enthält also im Ganzen n^2+1 Elemente.

138. Jede imaginäre Ebene U enthält eine reelle Gerade p, n^3+n^2 imaginäre Gerade

Jeder imaginäre Strahlenbündel enthält einen rellen Strahl, n^3+n^2 imaginäre Strahlen

I. Art und n^4-n^3 imaginäre Gerade II. Art, dann $n+1$ reelle und n^4+n^2-n imaginäre Punkte, also im Ganzen, gleichwie jede reelle Ebene, n^4+n^2+1 Punkte und eben so viele Gerade.

Art und n^4-n^3 imaginäre Strahlen II. Art, dann $n+1$ reelle und n^4+n^2-n imaginäre Ebenen, also im Ganzen, gleichwie jeder reelle Strahlenbündel, n^4+n^2+1 Ebenen und eben so viele Strahlen.

Die Gerade p wird nämlich (135) in jedem ihrer $n+1$ reellen Punkte von n^2 in der Ebene U liegenden imaginären Geraden I. Art und (137) in jedem ihrer n^2-n imaginären Punkte von n^2 in der Ebene U liegenden imaginären Geraden II. Art geschnitten. Da ferner jede der n^2 reellen Ebenen, welche die Gerade p in einem und demselben reellen Punkte schneiden, aus diesem Punkte n^2 reelle Gerade projicirt, so giebt es n^4 reelle Gerade, welche die Gerade p nicht schneiden, und also auch n^4 imaginäre Punkte, welche in der Ebene U aber ausserhalb der Geraden p liegen.

139. Im Raume sind n^3+n^2+n+1 reelle Punkte und eben so viele reelle Ebenen, dann $n^6+n^4-n^3-n$ imaginäre Punkte und eben so viele imaginäre Ebenen, im Ganzen also $n^6+n^4+n^2+1$ Punkte und eben so viele Ebenen enthalten. Ferner sind im Raume $n^4+n^3+2n^2+n+1$ reelle Gerade, dann $n^7+n^6+n^5-n^3-n^2-n$ imaginäre Gerade I. Art und $n^8-n^7-n^5+n^4$ imaginäre Gerade II. Art, also im Ganzen $n^8+n^6+2n^4+n^2+1$ Gerade enthalten.

Da nämlich eine reelle Gerade in jedem ihrer $n+1$ reellen Punkte von n^2 reellen Ebenen geschnitten wird und die Schnittlinie von $n+1$ reellen Ebenen ist, deren jede n^2 ausserhalb der Geraden liegende reelle Punkte enthält, so sind im Raume $(n+1)(n^2+1)$ reelle Ebenen und eben so viele reelle Punkte enthalten. Da ferner eine reelle Ebene n^2+n+1 reelle Gerade enthält und in jedem ihrer n^2+n+1 reellen Punkte von n^2 reellen Geraden geschnitten wird, so sind im Raume $(n^2+1)(n^2+n+1)$ reelle Gerade enthalten. Bemerkt man nun noch, dass in jeder reellen Geraden n^2-n imaginäre Punkte liegen und eben so viele imaginäre Ebenen sich schneiden, dass ferner (134) durch jeden reellen Punkt n^4-n imaginäre Gerade I. Art gehen, und dass endlich (138) eine reelle Ebene in jedem ihrer n^4-n imaginären Punkte

von $n^4 - n^3$ imaginären Geraden II. Art geschnitten wird, so ergeben sich auch die übrigen Theile des Satzes.

140. Ist U irgend eine Ebene, p irgend eine in ihr liegende Gerade und S irgend ein in dieser Geraden liegender Punkt, so ist

n^2 die Anzahl aller Punkte, welche aus dem Punkte S durch die Gerade p projicirt werden, n^4 die Anzahl aller Punkte, welche in der Ebene U aber ausserhalb der Geraden p liegen, und n^6 die Anzahl aller Punkte, welche ausserhalb der Ebene U liegen.

n^2 die Anzahl aller Ebenen, welche die Ebene U in der Geraden p schneiden, n^4 die Anzahl aller Ebenen, welche die Gerade p im Punkte S schneiden, und n^6 die Anzahl aller Ebenen, von welchen keine durch den Punkt S geht.

Die Anzahl aller Geraden, welche die Gerade p schneiden, ist $n^2(n^2+1)^2$, während die Anzahl der Geraden, welche die Gerade p nicht schneiden, n^8 ist. — Versteht man unter Elementen nur reelle Elemente, so hat man in diesen Ausdrücken n^m statt n^{2m} zu setzen.

141. Gleichwie von reellen Geraden, so soll von Geraden überhaupt gesagt werden, dass sie zu einander parallel sind oder einerlei Richtung haben, wenn sie die unendlich ferne Ebene in einem und demselben Punkte schneiden. Ebenen sind zu einander parallel oder haben einerlei Stellung, wenn sie die unendlich ferne Ebene in einer und derselben Geraden schneiden. Da es nun (134) n^4+n^2+1 unendlich ferne Punkte und eben so viele unendlich ferne Gerade giebt, so giebt es auch n^4+n^2+1 verschiedene Richtungen und eben so viele verschiedene Stellungen. Da ferner in jeder unendlich fernen Geraden n^2+1 unendlich ferne Punkte liegen und in jedem unendlich fernen Punkte n^2+1 unendlich ferne Gerade sich schneiden, so sind in jeder Stellung n^2+1 Richtungen enthalten, während jede Richtung in n^2+1 Stellungen enthalten ist. Eine imaginäre Gerade hat nur dann eine reelle Richtung, wenn ihr ein involutorischer Parallelstrahlenbüschel zu Grunde liegt. Die Stellung einer imaginären Ebene ist reell, wenn die reelle Axe der Ebene im Unendlichen liegt.

Durch jeden imaginären Punkt P, welcher nicht in der unendlich fernen Ebene liegt, ist ein harmonischer Wurf ABCD be-

stimmt, welcher nämlich die von dem unendlich fernen Punkte A seines reellen Trägers ausgehende harmonische Darstellung des imaginären Punktes ist. Da nun durch die Punkte B, D auch der unendlich ferne Punkt A der Geraden BD und der Punkt C bestimmt sind, welcher vom Punkte A durch die Punkte B, D harmonisch getrennt ist, so könnte man den imaginären Punkt P auch nur durch (B, D) und den ihm conjungirten Punkt, welcher von dem unendlich fernen Punkte A aus durch ADCB harmonisch dargestellt wird, durch (D, B) bezeichnen. Ausserhalb der unendlich fernen Ebene liegen n^3 reelle und $n^3(n^3-1)$ imaginäre Punkte.

---

§. 9.

Harmonische Würfe.

142. Die drei Punkte, in deren jedem zwei einander gegenüberliegenden Seiten eines vollständigen ebenen Vierecks EFGH sich schneiden, sind die drei Eckpunkte eines Dreiecks.

Schneiden sich nämlich die Geraden EF, GH in einem reellen Punkte A, so kann man ausserhalb der Ebene EFG vier reelle Punkte E_1, F_1, G_1, H_1 annehmen, so dass auch die Geraden $E_1 F_1$, $G_1 H_1$ durch den Punkt A gehen aber mit der Geraden EF nicht in einerlei Ebene liegen. Da nun das Viereck EFGH eine Projektion von EFG_1H_1 (aus dem Schnittpunkte der Geraden GG_1, HH_1) und das Viereck EFG_1H_1 eine Projektion von $E_1F_1G_1H_1$ ist, und da der Satz von dem reellen Vierecke $E_1F_1G_1H_1$ gilt, so gilt er auch von dem Vierecke EFG_1H_1 und mithin auch von dem Vierecke EFGH. Ist A ein imaginärer Punkt, so darf man nur, um diesen Fall auf den betrachteten zurückzuführen, ausserhalb der Ebene EFG einen reellen Punkt A_1 annehmen und alsdann das Viereck EFGH aus einem Punkte der Geraden AA_1 auf eine durch den Punkt A_1 gehende Ebene projiciren.

Die Gerade, welche den Punkt A mit dem Schnittpunkte C von EH und FG verbindet, schneidet also, auch wenn das Viereck EFGH imaginär ist, die Seiten EG, FH in zwei verschiedenen Punkten B, D. Sagt man nun auch von jedem imaginären harmonischen Wurfe ABCD, dass das erste und dritte seiner Elemente durch das zweite und vierte getrennt seien, weil diess von jedem

reellen harmonischen Wurfe gilt, so ist in den in G. §. 8 enthaltenen Sätzen durchaus nichts abzuändern, wenn nun der Begriff Element im weitern Sinne genommen wird.

143. Vier in einer und derselben imaginären Geraden II. Art sich schneidende Ebene P, Q, R, S liegen harmonisch, wenn ihre reellen Axen p, q, r, s harmonisch liegen.

befindliche Punkte liegen harmonisch, wenn ihre reellen Träger harmonisch liegen.

Es sei a irgend ein reeller Leitstrahl der Regelschaar pqr. Da nun die Gerade a die Ebenen P, Q, R, S beziehlich in den Punkten ap, aq, ar, as schneidet und $a(pqrs)$ ein harmonisches gerades Gebilde ist, so ist $PQRS$ ein harmonischer Ebenenbüschel.

144. Wenn $ABCD$ ein harmonischer Wurf ist und den Elementen A, B, C, D die Elemente A_1, B_1, C_1, D_1 conjungirt sind, so ist auch $A_1 B_1 C_1 D_1$ eiu harmonischer Wurf.

Ist $ABCD$ ein harmonisches gerades Gebilde, so seien u, u_1 zwei einander conjungirte imaginäre Gerade II. Art, von welchen die erstere die Gerade AB nicht schneidet. Da nun (143) die reellen Axen der Ebenen uA, uB, uC, uD harmonisch liegen und (124) zugleich die reellen Axen der Ebenen $u_1 A_1$, $u_1 B_1$, $u_1 C_1$, $u_1 D_1$ sind, so ist auch $u_1 (A_1 B_1 C_1 D_1)$ ein harmonischer Ebenenbüschel und mithin auch $A_1 B_1 C_1 D_1$ ein harmonisches gerades Gebilde.

145. Zwei einander conjungirte imaginäre Elemente P, P_1 I. Art sind durch je zwei einander zugeordnete (reelle) Elemente A, A_1 des ihnen zu Grunde liegenden involutorischen Gebildes harmonisch getrennt.

Es seien P, P_1 zwei einander conjungirte imaginäre Punkte und ABA_1B_1, AB_1A_1B die von A ausgehenden harmonischen Darstellungen derselben. Nimmt man nun in einer andern reellen Geraden, welche durch den Punkt A geht, noch drei reelle Punkte F, E_1, F_1 an, so dass auch AFE_1F_1 ein harmonischer Wurf ist, so schneiden sich die drei Geraden BF, A_1E_1, B_1F_1 in einem und demselben Punkte S und die drei Geraden BF_1, A_1E_1, B_1F in einem und demselben Punkte T. Bezeichnet man endlich die einander conjungirten imaginären Punkte AFE_1F_1, AF_1E_1F durch Q, Q_1, so ist QQ_1ST ein vollständiges Viereck, von welchen

zwei Seiten QS, Q_1T im Punkte P, zwei Seiten Q_1S, QT im Punkte P_1 sich schneiden, eine Seite QQ_1 durch den Punkt A und eine Seite ST durch den Punkt A_1 geht, woraus der Satz folgt.

146. Durch drei Gerade a, b, c, von welchen keine zwei sich schneiden, ist eine vierte Gerade d bestimmt, welche nämlich zu den drei gegebenen Geraden die vierte harmonische Gerade ist.

Es seien p, q, r irgend drei Gerade, deren jede die drei gegebenen Geraden schneidet. Man suche in der Geraden p zu den drei Punkten pa, pb, pc den vierten harmonischen Punkt D und in der Geraden q zu den drei Punkten qa, qb, qc den vierten harmonischen Punkt D_1. Weil nun, wenn man die Gerade DD_1 durch d bezeichnet, $\overline{p}(abcd)$ $\overline{q}(abcd)$ zwei harmonische Ebenenbüschel sind, so schneidet die Gerade r die Ebenen pd, qd in einem und demselben Punkte, der nämlich zu den drei Punkten ra, rb, rc der vierte harmonische Punkt ist. Da hiernach jede Gerade r, welche die drei Geraden a, b, c schneidet, auch die Gerade d schneidet, so dass $r(abcd)$ ein harmonisches gerades Gebilde und $\overline{r}(abcd)$ ein harmonischer Ebenenbüschel ist, so kann man sagen, dass die Geraden a, c durch die Geraden b, d harmonisch getrennt seien.

147. Zwei einander conjungirte imaginäre Gerade u, v II. Art sind durch je zwei einander zugeordnete reelle Gerade a, a_1 des ihnen zu Grunde liegenden involutorischen Systems harmonisch getrennt.

Es sei aba_1b_1 irgend eine von a ausgehende Darstellung der Geraden u, so ist ab_1a_1b eine Darstellung der Geraden v. Es seien ferner p, q irgend zwei reelle Leitstrahlen der Regelschaar aba_1. Da nun (145) die Punkte pu, pv durch die Punkte pa, pa_1 und die Punkte qu, qv durch die Punkte qa, qa_1 harmonisch getrennt sind, so sind (146) auch die Geraden u, v durch die Geraden a, a_1 harmonisch getrennt.

148. Durch vier Elemente A, A_1, B, B_1 eines und desselben einförmigen Gebildes sind zwei Elemente M, N dieses Gebildes bestimmt, welche nämlich sowohl durch die beiden erstern als auch durch die beiden letztern der vier gegebenen Elemente harmonisch getrennt sind.

Sind A, A_1, B, B_1 vier in einer und derselben imaginären Gerade u II. Art sich schneidende Ebenen, so sind (123) die

reellen Axen a, a_1, b, b_1 dieser Ebenen Leitstrahlen des der Geraden u zu Grunde liegenden involutorischen Systems. Wenn nun m, n diejenigen Leitstrahlen des Systems sind, welche (113) sowohl durch die Geraden a, a_1 als auch durch die Geraden b, b_1 harmonisch getrennt sind, so sind (143) um, un die im Satze erwähnten Ebenen. Sind A, A_1, B, B_1 vier in einer und derselben Geraden liegende Punkte, so darf man nur, um diesen Fall auf den eben betrachteten zurückzuführen, eine imaginäre Gerade u II. Art annehmen, welche die Gerade AB nicht schneidet. Die Ebenen, welche sowohl durch die Ebenen uA, uA_1 als auch durch die Ebenen uB, uB_1 harmonisch getrennt sind, schneiden die Gerade AB in zwei Punkten, welche sowohl durch die Punkte A, A_1 als auch durch die Punkte B, B_1 harmonisch getrennt sind. Jeder dritte Fall lässt sich auf den letztern zurückführen.

Sind die gegebenen Elemente sämmtlich reell, so sind M, N entweder zwei reelle oder (145) zwei einander conjungirte imaginäre Elemente, je nachdem nämlich der Sinn ABA_1 mit dem Sinne AB_1A_1 übereinstimmt oder demselben entgegengesetzt ist. Sind A, A_1 zwei einander conjungirte imaginäre Elemente und B, B_1 entweder zwei reelle oder ebenfalls zwei einander conjungirte imaginäre Elemente, so sind (82) M, N zwei reelle Elemente.

---

§. 10.

Homologe imaginäre Elemente in Grundgebilden, welche reell-projektivisch zu einander sind.

149. Wenn zwei reelle einförmige Gebilde, was ihre reellen Elemente anbelangt, projektivisch auf einander bezogen sind, so ist dadurch von selbst jedem imaginären Elemente ABCD in dem einen Gebilde ein imaginäres Element $A_1B_1C_1D_1$ im andern zugewiesen, indem jedem ordentlichen reellen Wurfe ABCD in dem einen Gebilde ein ordentlicher reeller Wurf $A_1B_1C_1D_1$ im andern entspricht. Ist EFGH eine andere Darstellung des imaginären Elements ABCD und $E_1F_1G_1H_1$ der dem Wurfe EFGH entsprechende Wurf, so ist auch $E_1F_1G_1H_1$ eine andere Darstellung des imaginären Elements $A_1B_1C_1D_1$. Da nämlich in dem involutori-

schen Gebilde $AC.BD\ldots$ dem Elemente E das Element G und dem Elemente F das Element H zugeordnet ist, so ist auch (72) in dem involutorischen Gebilde $A_1C_1.B_1D_1\ldots$ dem Elemente E_1 das Element G_1 und dem Elemente F_1 das Element H_1 zugeordnet. Da ferner der Sinn EFG mit dem Sinne ABC übereinstimmt, so stimmt auch der Sinn $E_1F_1G_1$ mit dem Sinne $A_1B_1C_1$ überein. Es entspricht hiernach jeder Darstellung EFGH des einen von zwei homologen imaginären Elementen eine Darstellung $E_1F_1G_1H_1$ des andern, so dass nämlich dem Wurfe EFGH der Wurf $E_1F_1G_1H_1$ entspricht. Liegt jedes reelle Element des einen Gebildes in dem ihm entsprechenden Elemente des andern, so liegt auch jedes imaginäre Element des erstern Gebildes in dem ihm entsprechenden Elemente des letztern. Dass aber auch jedem imaginären harmonischen Wurfe in dem einen Gebilde ein harmonischer Wurf im andern entspricht, geht daraus hervor, weil die Gebilde, wenn sie auch nicht selbst perspektivisch zu einander sind, doch als das erste und letzte von drei oder mehrern einförmigen Gebilden betrachtet werden können, von welchen jedes folgende zum vorhergehenden perspektivisch ist.

Sind zwei reelle einförmige Gebilde auf die obige Weise projektivisch auf einander bezogen, so sollen sie reell-projektivisch zu einander heissen. Je zwei einander conjungirten imaginären Elementen in dem einen von zwei solchen Gebilden entsprechen zwei einander conjungirte imaginäre Elemente im andern. Haben also die Gebilde ein imaginäres Element entsprechend gemein, so haben sie auch das demselben conjungirte Element entsprechend gemein. Entspricht dem imaginären Elemente PQRS das imaginäre Element $P_1Q_1R_1S_1$ und dem reellen Elemente P das reelle Element P_1, so entspricht auch dem Elemente R das Element R_1. Wenn überdiess die Darstellungen der beiden imaginären Elemente zu einander projektivisch sind, so entspricht auch (118) dem Elemente Q das Element Q_1 und dem Elemente S das Element S_1.

Anm. Dass je zwei einförmige Gebilde projektivisch auf einander bezogen und zu drei aber auch nur zu drei Elementen des einen drei Elemente des andern, welche jenen entsprechen sollen, nach Belieben angenommen werden können, kann hier noch nicht nachgewiesen werden.

150. Will man zwei reelle einförmige Gebilde reell-projekti-

visch so auf einander beziehen, dass einem gegebenen imaginären Elemente P des einen Gebildes ein gegebenes imaginäres Element P_1 des andern entspreche, so kann man noch zu einem reellen Elemente A des einen Gebildes ein reelles Element A_1 des andern, welches nämlich jenem entsprechen soll, nach Belieben annehmen, wodurch aber alsdann jedem Elemente in dem einen Gebilde ein Element im andern zugewiesen ist.

Es sei ABCD irgend eine von A ausgehende Darstellung des imaginären Elements P und $A_1 B_1 C_1 D_1$ die von A_1 ausgehende und zu ABCD projektivische Darstellung des imaginären Elements P_1. Bezieht man nun die gegebenen einförmigen Gebilde reell-projektivisch so auf einander, dass dem Wurfe ABCD der Wurf $A_1 B_1 C_1 D_1$ entspricht, so entsqricht dem reellen Elemente A das reelle Element A_1 und dem imaginären Elemente P das imaginäre Element P_1. Und wenn den Elementen A, P die Elemente A_1, P_1 entsprechen sollen, so muss auch (149) dem Wurfe ABCD der Wurf $A_1 B_1 C_1 D_1$ entsprechen.

Haben also zwei reelle in einander liegende einförmige Gebilde, welche reell-projektivisch zu einander sind, ein reelles und ein imaginäres Element entsprechend gemein, so haben sie alle ihre Elemente entsprechend gemein.

151. Zwei reelle einförmige Gebilde können höchstens auf eine Art reell-projektivisch so auf einander bezogen werden, dass zwei gegebenen einander nicht conjungirten imaginären Elementen P, R des eines Gebildes zwei gegebene einander nicht conjungirte imaginäre Elemente P_1, R_1 des andern entsprechen.

Es seien den Elementen P, R die Elemente Q, S und den Elementen P_1, R_1 die Elemente Q_1, S_1 conjungirt. Es seien ferner M, N die reellen Elemente, welche (148) sowohl durch die Elemente P, Q als auch durch die Elemente R, S harmonisch getrennt sind, und eben so M_1, N_1 die reellen Elemente, welche sowohl durch die Elemente P_1, Q_1 als auch durch die Elemente R_1, S_1 harmonisch getrennt sind. Es seien endlich MANC, MBND die von M ausgehenden harmonischen Darstellungen der Elemente P, R und $M_1 A_1 N_1 C_1$, $M_1 B_1 N_1 D_1$ die von M_1 ausgehenden harmonischen Darstellungen der Elemente P_1, R_1. Wenn nun den Elementen P, R die Elemente P_1, R_1 entsprechen sollen, so

müssen auch (149) den Elementen Q, S die Elemente Q_1, S_1 und mithin den Elementen M, N entweder die Elemente M_1, N_1 oder die Elemente N_1, M_1 entsprechen. Im erstern Falle muss dem Wurfe MANC der Wurf $M_1 A_1 N_1 C_1$ und dem Wurfe MBND der Wurf $M_1 B_1 N_1 D_1$ entsprechen, folglich $MNAB \barwedge M_1 N_1 A_1 B_1$ sein. Im zweiten Falle muss dem Wurfe MANC der Wurf $N_1 C_1 M_1 A_1$ und dem Wurfe MBND der Wurf $N_1 D_1 M_1 B_1$ entsprechen, folglich $MNAB \barwedge N_1 M_1 C_1 D_1$ sein. Dass aber die Würfe $M_1 N_1 A_1 B_1$, $N_1 M_1 C_1 D_1$ nicht projektivisch zu einander sind und also höchstens einer derselben zu dem Wurfe MNAB projektivisch sein kann, geht daraus hervor, weil in dem involutorischen Gebilde $A_1 C_1 . B_1 D_1 \ldots$ das Element M_1 nicht dem Elemente N_1 sondern sich selbst zugeordnet ist.

Haben also zwei reelle in einander liegende einförmige Gebilde, welche reell-projektivisch zu einander sind, zwei imaginäre einander nicht conjungirte Elemente entsprechend gemein, so haben sie alle ihre Elemente entsprechend gemein.

152. Wenn zwei reelle einförmige Gebilde, welche reell-projektivisch zu einander sind, in einander liegen und irgend zwei homologe imaginäre Elemente P, P_1 derselben einander conjungirt sind, so liegen die Gebilde involutorisch und haben zwei reelle Elemente entsprechend gemein, welche durch je zwei einander zugeordnete Elemente harmonisch getrennt sind.

Es entspreche dem Wurfe ABCD in dem einen Gebilde, welcher das imaginäre Element P desselben darstellt, der Wurf $A_1 B_1 C_1 D_1$ im andern, so ist $A_1 B_1 C_1 D_1$ eine Darstellung des imaginären Elements P_1 und also der Sinn $A_1 B_1 C_1$ dem Sinne ABC entgegengesetzt, woraus man schliessen kann, dass die zu einander projektivischen Gebilde zwei reelle Elemente M, N entsprechend gemein haben. Es sei nun $MFGF_1$ die von M ausgehende harmonische Darstellung des Elements P, so ist MF_1GF die von M ausgehende harmonische Darstellung des Elements P_1, daher (149) dem Wurfe $MFGF_1$ der Wurf MF_1GF entspricht. Da hiernach die reellen Elemente F, F_1 einander abwechselnd entsprechen, so gilt diess von je zwei homologen reellen Elementen, folglich auch von je zwei homologen reellen Würfen und mithin auch von je zwei homologen imaginären Elementen. Da endlich, wenn Q, Q_1 irgend zwei einander zugeordnete Elemente sind, das Element R, welches zu den drei Ele-

menten Q, M, Q_1 und daher auch zu den drei Elementen Q_1, M, Q das vierte harmonische Element ist, sich selbst entspricht, die zu einander projektivischen Gebilde aber weder mehr als zwei reelle Elemente noch (150) ein imaginäres Element entsprechend gemein haben, so folgt, dass das Element R (und eben so das vorhin durch G bezeichnete Element) mit dem Elemente N zusammenfällt, und dass also je zwei einander zugeordnete Elemente Q, Q_1 durch die Elemente M, N harmonisch getrennt sind.

153. Wenn zwei reelle einförmige Gebilde, welche reell-projektivisch zu einander sind, in einander liegen und irgend zwei homologe Elemente P, P_1 derselben einander abwechselnd entsprechen, so liegen die Gebilde involutorisch und haben zwei Elemente entsprechend gemein, welche durch je zwei einander zugeordnete Elemente harmonisch getrennt und entweder beide reell oder beide imaginär und im letztern Falle einander conjungirt sind.

Sind nämlich P, P_1 entweder zwei reelle oder zwei einander conjungirte imaginäre Elemente, so folgt wie vorhin, dass je zwei homologe Elemente der zu einander projektivischen Gebilde einander abwechselnd entsprechen. Wenn aber P, P_1 zwei einander nicht conjungirte imaginäre Elemente und Q, Q_1 die ihnen conjungirten Elemente sind, so entsprechen (149) den Elementen P, Q, P_1, Q_1 des einen Gebildes die Elemente P_1, Q_1, P, Q des andern, daher die reellen Elemente M, N, welche sowohl durch die Elemente P, Q als auch durch die Elemente P_1, Q_1 harmonisch getrennt sind, entweder einander abwechselnd entsprechen oder jedes dieser Elemente sich selbst entspricht, in welchem letztern Falle je zwei von M ausgehende zu einander projektivische Würfe, von welchen der eine das Element P und der andere das Element P_1 darstellt, einander abwechselnd entsprechen. Da es hiernach in jedem Falle reelle Elemente giebt, welche einander abwechselnd entsprechen, so gilt diess von je zwei homologen Elementen. Sind nun A, B irgend zwei einander nicht zugeordnete reelle Elemente und A_1, B_1 die ihnen zugeordneten Elemente, so hat man zu unterscheiden, ob der Sinn ABA_1 mit dem Sinne A_1B_1A übereinstimmt oder demselben entgegengesetzt ist. Im letztern Falle haben die zu einander projektivischen Gebilde zwei reelle Elemente entsprechend gemein, während im erstern Falle das imaginäre Element ABA_1B_1 dem

imaginären Elemente $A_1 B_1 AB$ also sich selbst zugeordnet ist und diess eben so von dem imaginären Elemente $AB_1 A_1 B$ gilt. Dass endlich die sich selbst zugeordneten Elemente S, T, deren es (150, 151) nicht mehr als zwei giebt, durch je zwei homologe Elemente E, E_1 harmonisch getrennt sind, geht daraus hervor, weil das Element, welches zu den drei Elementen E, S, E_1 und daher auch zu den drei Elementen E_1, S, E das vierte harmonische Element ist, sich selbst entspricht und daher mit T zusammenfällt.

Zwei einander conjungirte imaginäre Elemente I. Art sind also nichts anderes als die Ordnungselemente des ihnen zu Grunde liegenden involutorischen Gebildes.

Aus dem Satze selbst geht nun hervor, dass, wenn P, Q irgend zwei einander nicht zugeordnete Elemente eines involutorischen einförmigen Gebildes und P_1, Q_1 die ihnen zugeordneten Elemente sind, diejenigen Elemente des Gebildes, welche sowohl durch die Elemente P, Q als auch durch die Elemente P_1, Q_1 harmonisch getrennt sind, einander zugeordnet sind und also der letztere der oben in Hinsicht auf die Elemente M, N angenommenen Fälle gar nicht statt finden kann. Die sich selbst zugeordneten Elemente sind nämlich durch die Elemente P, P_1 und also nicht durch die Elemente P, Q harmonisch getrennt.

154. Zwei in einander liegende reelle einförmige Gebilde u, u_1, welche reell-projektivisch zu einander sind, haben, wenn nämlich nicht jedes Element des einen Gebildes mit dem ihm entsprechenden Elemente des andern zusammenfällt, entweder ein reelles oder zwei reelle oder zwei einander conjungirte imaginäre Elemente entsprechend gemein.

Liegen die Gebilde involutorisch, so findet (153) einer von den beiden letztern der im Satze erwähnten Fälle statt. Wenn aber dem reellen Elemente A des Gebildes u das Element A_1 des Gebildes u_1 und dem Elemente A_1 des erstern Gebildes ein von A verschiedenes Element A_2 des letztern entspricht, so kommt es darauf an, ob die zu einander projektivischen Gebilde das reelle Element H_1, welches zu den drei Elementen A, A_1, A_2 das vierte harmonische Element ist, entsprechend gemein haben oder ob dem Elemente H_1 des Gebildes u ein anderes Element H_2 des Gebildes u_1 entspricht. Im erstern dieser Fälle haben die Gebilde (nach

86 und 150) nur das Element H_1, im letztern aber, wie sogleich bewiesen werden soll, die beiden Elemente M, N entsprechend gemein, welche sowohl durch die Elemente A_1, H_1 als auch durch die Elemente A_2, H_2 harmonisch getrennt sind. Entspricht nämlich dem Elemente A_2 des Gebildes u das Element A_3 des Gebildes u_1, so sind $AA_1A_2H_1$, $A_2A_1AH_1$, $A_1A_2A_3H_2$ homologe harmonische Würfe von drei zu einander projektivischen Gebilden u, v, u_1, von welchen sowohl die beiden erstern als auch die beiden letztern involutorisch liegen. Da nun (153) den Elementen M, N des Gebildes u die Elemente N, M des Gebildes v und den Elementen N, M des Gebildes v die Elemente M, N des Gebildes u_1 entsprechen, so folgt, dass die Gebilde u, u_1 die Elemente M, N entsprechend gemein haben.

155. Wenn ein reelles gerades Gebilde u und ein reeller Ebenenbüschel s reell-projektivisch zu einander sind, aber das gerade Gebilde weder zu dem Ebenenbüschel perspektivisch ist noch mit der Axe s desselben einen Punkt gemein hat, so giebt es (154) in der Geraden u entweder nur einen uud zwar einen reellen Punkt, der in der ihm entsprechenden Ebene des Büschels liegt, oder es enthält die Gerade u zwei reelle oder zwei einander conjungirte imaginäre Punkte, deren jeder in der ihm entsprechenden Ebene des Büschels liegt. Giebt es in der Geraden u irgend zwei Punkte, deren jeder in der dem andern entsprechenden Ebene liegt, so liegen die zu einander projektivischen Gebilde involutorisch. Die Gerade u enthält alsdann nicht nur zwei Punkte, deren jeder in der ihm entsprechenden Ebene liegt, sondern es sind überdiess diese Punkte durch jeden dritten Punkt der Geraden und die ihm entsprechende Ebene harmonisch getrennt.

Analoges gilt, wenn ein reeller Strahlenbüschel und ein reelles gerades Gebilde, welches mit dem Büschel in einerlei Ebene liegt aber nicht durch seinen Mittelpunkt geht, oder ein reeller Strahlenbüschel und ein reeller Ebenenbüschel, dessen Axe durch den Mittelpunkt des Strahlenbüschels geht aber mit ihm nicht in einerlei Ebene liegt, reel-projektivisch jedoch nicht perspektivisch zu einander sind.

156. Wenn zwei räumliche Systeme, was ihre reellen Elemente anbelangt, projektivisch auf einander bezogen sind, so ist

dadurch von selbst auch jedem imaginären Elemente in dem einen Systeme ein imaginäres Element im andern zugewiesen. Da nämlich jedem reellen einförmigen Gebilde in dem einen Systeme ein reelles einförmiges Gebilde im andern entspricht, so entspricht auch (149) jedem imaginären Elemente I. Art in dem einen Systeme ein imaginäres Element I. Art im andern. Namentlich entspricht, wenn die Systeme reciprok zu einander sind, jedem imaginären Punkte ABCD in dem einen Systeme eine imaginäre Ebene $A_1 B_1 C_1 D_1$ im andern, jeder durch den Punkt ABCD gehenden imaginären Geraden S(ABCD) I. Art eine in der Ebene $A_1 B_1 C_1 D_1$ liegende imaginäre Gerade $S_1 (A_1 B_1 C_1 D_1)$ I. Art und jeder durch den Punkt ABCD gehenden imaginären Ebene ein in der Ebene $A_1 B_1 C_1 D_1$ liegender imaginärer Punkt. Es entspreche nun dem Wurfe abcd in dem einen Systeme, welcher eine imaginäre Gerade II. Art darstellt, der Wurf $a_1 b_1 c_1 d_1$ im andern. Es seien ferner p, q zwei reelle Leitstrahlen der Regelschaar abc und p_1, q_1 die ihnen entsprechenden Leitstrahlen der Regelschaar $a_1 b_1 c_1$. Da nun den imaginären Punkten p(abcd), q(abcd) die imaginären Ebenen $p_1 (a_1 b_1 c_1 d_1)$, $q_1 (a_1 b_1 c_1 d_1)$ entsprechen, so entspricht jeder Ebene, welche durch die Gerade abcd und also auch durch jene Punkte geht, ein Punkt, welcher in der Geraden $a_1 b_1 c_1 d_1$ liegt, und eben so jedem in der Geraden abcd befindlichen Punkte eine durch die Gerade $a_1 b_1 c_1 d_1$ gehende Ebene, mithin der Geraden abcd die Gerade $a_1 b_1 c_1 d_1$. Bemerkt man noch, dass jedem vollständigen ebenen Vierseite in dem einen Systeme ein vollständiges Vierkant im andern entspricht, so folgt, dass auch jedem harmonischen Wurfe in dem einen Systeme, es mag derselbe einem reellen oder imaginären einförmigen Gebilde angehören, ein harmonischer Wurf im andern entspricht, daher auch je vier harmonisch liegenden Geraden in dem einen Systeme, deren keine zwei sich schneiden, vier solche harmonisch liegende Gerade im andern entsprechen. Dasselbe ist der Fall, wenn die Systeme collineär zu einander sind, folglich jedem vollständigen Vierseite in dem einen Systeme ein vollständiges Vierseit im andern entspricht.

Sind zwei räumliche Systeme auf die obige Art auf einander bezogen, so sollen sie reell-projektivisch zu einander heissen. Es geht aber hieraus von selbst hervor, was es heisst, wenn von zwei

reellen Grundgebilden der zweiten Stufe gesagt wird, dass sie reell-projektivisch zu einander sind.

157. Sollen zwei reelle ebene Systeme reell-projektivisch so auf einander bezogen werden, dass einem gegebenen imaginären Punkte P des einen Systems eine gegebene imaginäre Gerade p des andern entspreche, so kann man noch zu zwei reellen Punkten M, N des einen Systems, von welchen keiner in dem reellen Träger s des imaginären Punkts liegt, zwei reelle Gerade m, n des andern Systems, von welchen keine durch den reellen Punkt S der imaginären Geraden geht, nach Belieben annehmen, wodurch aber alsdann jedem Elemente des einen Systems ein Element des andern zugewiesen ist.

Dem Punkte A, in welchem die Gerade s von der Geraden MN geschnitten wird, muss die Gerade a entsprechen, welche den Punkt S mit dem Punkte mn verbindet. Ist also ABCD irgend eine von A ausgehende Darstellung des Punktes P und abcd die von a ausgehende zu ABCD projektivische Darstellung der Geraden p, so müssen auch den Punkten B, C, D die Geraden b, c, d entsprechen. Und wenn man die ebenen Systeme projektivisch so auf einander bezieht, dass den Punkten M, N, B, C des einen Systems die Geraden m, n, b, c des andern entsprechen, so entspricht dem Punkte A die Gerade a, folglich dem Punkte D die Gerade d und mithin dem imaginären Punkte ABCD die imaginäre Gerade abcd. Man kann hiernach auch zwei reelle ebene Systeme reell-projektivisch so auf einander beziehen, dass zwei gegebenen imaginären Geraden M(ABCD), N(ABCD) des einen Systems, welche in einem imaginären Punkte sich schneiden, zwei gegebene imaginäre Punkte m(abcd), n(abcd) des andern Systems, welche nicht in einer und derselben reellen Geraden liegen, entsprechen. Aber auch in diesem Falle sind eigentlich zu vier Elementen des einen Systems vier Elemente des andern gegeben, da durch ein imaginäres Element auch das demselben conjungirte imaginäre Element bestimmt ist und je zwei einander conjungirten imaginären Elementen des einen Systems zwei einander conjungirte imaginäre Elemente des andern entsprechen müssen.

Haben zwei ebene Systeme, welche reell-projektivisch zu einander sind, einen imaginären Punkt und zwei reelle Punkte, von

welchen keiner in dem reellen Träger des imaginären Punktes liegt, oder eine imaginäre Gerade und zwei reelle Gerade, von welchen keine durch den reellen Punkt der imaginären Geraden geht, oder zwei nicht in einer und derselben reellen Geraden liegende imaginäre Punkte oder zwei nicht durch einen und denselben reellen Punkt gehende imaginäre Gerade entsprechend gemein, so haben sie alle ihre Elemente entsprechend gemein.

158. Sollen zwei räumliche Systeme reell-projektivisch so auf einander bezogen werden, dass einem gegebenen imaginären Punkte P des einen Systems eine gegebene imaginäre Ebene P_1 des andern entspreche, so kann man noch zu drei nicht in einer und derselben Geraden liegenden reellen Punkten A, B, C des einen Systems, von welchen keine zwei mit dem reellen Träger s des gegebenen imaginären Punkts in einerlei Ebene liegen, drei nicht in einer und derselben Geraden sich schneidende reelle Ebenen A_1, B_1, C_1 des andern Systems, von welchen keine zwei die reelle Axe s_1 der gegebenen imaginären Ebene in einem und demselben Punkte schneiden, nach Belieben annehmen, wodurch aber alsdann jedem Elemente des einen Systems ein Element des andern zugewiesen ist.

Dem Punkte E, in welchem die Gerade s von der Ebene ABC geschnitten wird, muss die Ebene E_1 entsprechen, welche die Gerade s_1 aus dem Punkte $A_1 B_1 C_1$ projicirt. Ist also EFGH irgend eine von E ausgehende Darstellung des imaginären Punktes P und $E_1 F_1 G_1 H_1$ die von E_1 ausgehende zu EFGH projektivische Darstellung der imaginären Ebene P_1, so müssen auch den Punkten F, G, H die Ebenen F_1, G_1, H_1 entsprechen. Und wenn man die Systeme projektivisch so auf einander bezieht, dass den Punkten A, B, C, F, G des einen Systems die Ebenen A_1, B_1, C_1, F_1, G_1 des andern entsprechen, so entspricht auch dem Punkte E die Ebene E_1, folglich dem Punkte H die Ebene H_1 und mithin dem imaginären Punkte EFGH die imaginäre Ebene $E_1 F_1 G_1 H_1$.

159. Sollen zwei räumliche Systeme reell-projektivisch so auf einander bezogen werden, dass zwei gegebenen imaginären Punkten P, Q des einen Systems, deren reelle Träger p, q nicht in einerlei Ebene liegen, zwei gegebene imaginäre Ebenen P_1, Q_1 des andern Systems, deren reelle Axen p_1, q_1 keinen Punkt mit einander gemein haben, entsprecchen, so kann man noch zu einem reellen Punkt

A des einen Systems, welcher in keiner der Geraden p, q liegt, eine reelle Ebene A_1 des andern Systems, welche durch keine der Geraden p_1, q_1 geht, nach Belieben annehmen, wodurch aber alsdann jedem Elemente des einen Systems ein Element des andern zugewiesen ist.

Dem Punkte E, in welchem die Gerade p von der Ebene Aq geschnitten wird, muss die Ebene E_1 entsprechen, welche die Gerade p_1 aus dem Punkte $A_1 q_1$ projicirt. Ist also EFGH irgend eine von E ausgehende Darstellung des imaginären Punktes P und $E_1 F_1 G_1 H_1$ die von E_1 ausgehende zu EFGH projektivische Darstellung der Ebene P_1, so müssen auch den Punkten F, G, H die Ebenen F_1, G_1, H_1 entsprechen. Und wenn man die Systeme reell-projektivisch so auf einander bezieht, dass (158) den Punkten Q, A, F, G des einen Systems die Ebenen Q_1, A_1, F_1, G_1 des andern entsprechen, so entspricht der Ebene Aq der Punkt $A_1 q_1$, dem Punkte E die Ebene E_1 und dem Punkte P die Ebene P_1. Die mit diesem und dem vorigen Satze verwandten Sätze, welche von zwei zu einander collineären Systemen handeln, ergeben sich aus ihnen von selbst.

Haben zwei räumliche Systeme, welche reell-projektivisch zu einander sind, drei reelle Punkte, welche die Eckpunkte eines Dreiecks sind, und einen imaginären Punkt, dessen reeller Träger mit keiner Seite des Dreiecks in einerlei Ebene liegt, oder drei reelle Ebenen, welche die Seiten eines Dreikants sind, und eine imaginäre Ebene, deren reelle Axe mit keiner Kante des Dreikants in einerlei Ebene liegt, oder zwei imaginäre Punkte, deren reelle Träger nicht in einerlei Ebene liegen, und einen reellen Punkt, welcher in keiner von diesen Geraden liegt, oder zwei imaginäre Ebenen, deren reelle Axen nicht in einerlei Ebene liegen, und eine reelle Ebene, welche durch keine dieser Geraden geht, entsprechend gemein, so haben sie alle ihre Elemente entsprechend gemein.

160. Will man zwei räumliche Systeme reell-projektivisch so auf einander beziehen, dass der reellen Geraden a die reelle Gerade a_1 und der imaginären Geraden u II. Art, welche die Gerade a nicht schneidet, die imaginäre Gerade u_1 II. Art, welche die Gerade a_1 nicht schneidet, entspreche, so kann man noch zu drei reellen Punkten P, Q, R der Geraden a oder zu drei reellen Ebenen des Ebe-

nenbüschels a drei reelle Punkte der Geraden a_1 oder drei reelle Ebenen P_1, Q_1, R_1 des Ebenenbüschels a_1 nach Belieben annehmen, wodurch aber alsdann jedem Elemente des einen Systems ein Element des andern zugewiesen ist.

Es sei a b c d irgend eine von a ausgehende Darstellung der imaginären Geraden u und $a_1 b_1 c_1 d_1$ die von a_1 ausgehende zu a b c d projektivische Darstellung der imaginären Geraden u_1. Es seien ferner p, q, r diejenigen Leitstrahlen der Regelschaar a b c, welche durch die Punkte P, Q, R gehen, und p_1, q_1, r_1 diejenigen Leitstrahlen der Regelschaar $a_1 b_1 c_1$, welche in den Ebenen P_1, Q_1, R_1 liegen. Bezieht man nun zwei räumliche Systeme projektivisch so auf einander, dass den reellen Elementen P, Q, R, b, c des einen Systems die reellen Elemente P_1, Q_1, R_1, b_1, c_1 des andern entsprechen, so entspricht auch der imaginären Geraden u des erstern Systems die imaginäre Gerade u_1 des letztern. Und wenn den Elementen P, Q, R, u die Elemente P_1, Q_1, R_1, u_1 entsprechen sollen, so müssen auch den Geraden b, c die Geraden b_1, c_1 entsprechen.

161. Wenn man zwei räumliche Systeme reell-projektivisch so auf einander bezieht, dass je zwei homologe reelle Elemente, also auch je zwei homologe reelle Würfe und mithin auch je zwei homologe imaginäre Elemente einander abwechselnd entsprechen, so hat man entweder ein reelles involutorisches System oder ein reelles Polarsystem. Ist von vier harmonisch liegenden Geraden a, m, a_1, n die erste der dritten, die zweite aber sich selbst zugeordnet, so gilt diess auch von der vierten, da diese auch zu den drei Geraden a_1, m, a die vierte harmonische Gerade ist.

Zwei einander conjungirte imaginäre Gerade II. Art sind nichts anderes als die Ordnungslinien des ihnen zu Grunde liegenden involutorischen Systems $a a_1 . b b_1 \ldots$. Denn die einander zugeordneten Würfe $a b a_1 b_1$, $a_1 b_1 a b$ stellen eine und dieselbe imaginäre Gerade m dar, daher diese sich selbst zugeordnet ist. Dasselbe gilt von der ihr conjungirten Geraden n. Da ferner jeder reelle Leitstrahl p des Systems sich selbst zugeordnet ist, so gilt diess auch von jedem Punkte m p oder n p, welcher in der einen oder in der andern von den beiden Geraden m, n liegt, und von jeder Ebene, welche durch irgend eine dieser Geraden geht, mithin auch

von jeder Geraden, welche die beiden Geraden m, n schneidet. Jedem Punkte aber, welcher in keiner von den beiden Geraden m, n liegt, ist ein anderer Punkt, jeder Ebene, welche durch keine dieser Geraden geht, eine andere Ebene und jeder Geraden, welche nicht beide Ordnungslinien schneidet, eine andere Gerade zugeordnet. Je zwei einander zugeordnete sich nicht schneidende Gerade, also auch je zwei einander zugeordnete Punkte und je zwei einander zugeordnete Ebenen sind durch die Ordnunglinien harmonisch getrennt.

---

§. 11.

Reelle Polarsysteme.

162. Die Ordnungscurve eines ebenen Polarsystems ist nichts anderes als der Inbegriff von allen denjenigen Punkten der Ebene, deren jeder in seiner Polare liegt. Der Inbegriff von allen Geraden, deren jede durch ihren Pol geht, ist der der Curve sich anschmiegende Strahlenbüschel. Geht eine Gerade p durch ihren Pol P, so hat das gerade Gebilde p, da jeder andere Punkt desselben ausserhalb seiner Polare liegt, mit der Curve nur den Punkt P und eben so der Strahlenbüschel P mit dem der Curve sich anschmiegenden Strahlenbüschel nur den Strahl p gemein.

163. Jede reelle Gerade s, welche in der Ebene eines reellen ebenen Polarsystems liegt, aber der Ordnungscurve K desselben sich nicht anschmiegt, schneidet diese Curve entweder in zwei reellen oder in zwei einander conjungirten imaginären Punkten. Im Pole S der Geraden s schneiden sich im erstern Falle zwei reelle, im letztern aber zwei einander conjungirte imaginäre Strahlen des der Curve sich anschmiegenden Strahlenbüschels.

Wenn nämlich SAA_1, SBB_1 zwei reelle Polardreiecke sind, welche den Eckpunkt S und also auch die ihm gegenüberliegende Seite s mit einander gemein haben, und der Punkt B_1 in der Strecke ABA_1 liegt, so schneidet die Gerade s die Curve K in zwei reellen Punkten, in welchen dieselbe zwei reelle im Punkte S sich schneidende Gerade berührt. Wenn aber die Punkte A, A_1 durch die Punkte B, B_1 getrennt sind, so liegt der imaginäre Punkt ABA_1B_1 in der ihm zugeordneten Geraden $S(A_1B_1AB)$

und eben so der imaginäre Punkt AB_1A_1B in der ihm zugeordneten Geraden $S(A_1BAB_1)$.

Ist die Ordnungscurve eines ebenen Polarsystems reell, so hat jedes in dem Systeme enthaltene reelle Polardreieck zwei Seiten, welche die Curve in reellen Punkten schneiden, während dieselbe von der dritten Seite des Dreiecks in imaginären Punkten geschnitten wird. Die Ordnungscurve eines reellen Polarsystems, welches in einer eigentlichen Ebene liegt, heisst eine Parabel oder eine Hyperbel oder eine Ellipse, je nachdem sie die unendlich ferne Gerade der Ebene in einem Punkte berührt oder in zwei reellen oder in zwei imaginären Punkten schneidet. Eine Ellipse kann also auch imaginär sein.

164. Wenn eine imaginäre Gerade abcd und eine reelle Curve II. Ordnung, welche in einerlei Ebene liegen, durch einen und denselben reellen Punkt gehen, so schneiden sie sich auch noch in einem imaginären Punkte.

Durch jeden imaginären Punkt ABCD, dessen reeller Träger eine reelle Curve II. Ordnung berührt, geht auch eine imaginäre Tangente der Curve.

Es seien A_1, B_1, C_1, D_1 diejenigen Punkte der Curve, welche aus dem Punkte ab durch die Geraden a, b, c, d projicirt werden. Ist nun p die Involutionsaxe des in der Curve enthaltenen involutorischen Gebildes $A_1C_1.B_1D_1\ldots$, so ist p(abcd) ein imaginärer Punkt, welcher sowohl in der Geraden abcd als auch (75) in der Curve liegt. Und wenn ein imaginärer Punkt s(abcd) der Geraden abcd, dessen reeller Träger nämlich die Gerade s ist, in der Curve liegen soll, so muss in Hinsicht auf dieselbe der Punkt sa dem Punkte sc und der Punkt sb dem Punkte sd, mithin (G. 253) die Gerade s sowohl der Geraden A_1C_1 als auch der Geraden B_1D_1 conjugirt sein und also s mit p zusammenfallen. Eben so ist das Involutionscentrum desjenigen der Curve sich anschmiegenden involutorischen Strahlenbüschels, welcher zu dem involutorischen geraden Gebilde AC.BD... perspektivisch ist, der reelle Punkt der durch den imaginären Punkt ABCD gehenden imaginären Tangente.

165. Jede imaginäre Gerade, welche mit einem reellen Polarsysteme in einerlei Ebene liegt,

In jedem imaginären Punkte ABCD, welcher mit einem reellen Polarsysteme in einerlei

aber weder mit der Ordnungscurve des Systems einen reellen Punkt gemein hat noch derselben sich anschmiegt, schneidet die Curve in zwei imaginären Punkten, deren reelle Träger durch den reellen Punkt der imaginären Geraden und dessen Polare harmonisch gertrennt sind.

Ebene aber weder in der Ordnungscurve des Systems noch in einer reellen Tangente derselben liegt, schneiden sich zwei imaginäre Tangenten der Curve, deren reelle Punkte durch den reellen Träger AB des imaginären Punkts und den Pol S dieser Geraden harmonisch getrennt sind.

Da die Gerade AB zwei reelle Punkte enthält, welche (82) in dem involutorischen geraden Gebilde AC.BD... einander zugeordnet und zugleich in dem Polarsysteme einander conjugirt sind, so kann man annehmen, dass SAC ein Polardreieck ist. Da alsdann die Punkte B, D einander nicht conjugirt sind, so wird das dem Strahlenbüschel B zugeordnete gerade Gebilde aus dem Punkte D durch einen Strahlenbüsbhel D projicirt, welcher zum erstern projektivisch ist. Weil ferner je zwei homologe Strahlen dieser Büschel einander conjugirt sind, folglich den Strahlen BS, BD des einen die Strahlen DB, DS des andern entsprechen, so erzeugen sie eine Curve K II. Ordnung, welche die Geraden SB, SD in den Punkten B, D berührt und daher die eine von den beiden Geraden SA, SC in zwei reellen Punkten F, G, die andere aber in zwei imaginären Punkten schneidet. Da nun in dem Polarsysteme der Geraden FA die Gerade FC und der Geraden FB die Gerade FD conjugirt ist, so berührt die Ordnungscurve des Systems die imaginäre Gerade F(ABCD) und eben so die imaginäre Gerade G(ABCD). Und wenn eine durch den imaginären Punkt ABCD gehende imaginäre Gerade in dem Polarsysteme sich selbst conjugirt sein soll, so müssen, wenn man ihren reellen Punkt durch H bezeichnet, sowohl die Geraden HA, HC als auch die Geraden HB, HD einander conjugirt sein, woraus man schliessen kann, dass der Punkt H in einer von den beiden Geraden SA, SC und zugleich in der Curve K liegt, demnach entweder mit F oder mit G zusammenfällt. Bemerkt man noch, dass die zu einander projektivischen Strahlenbüschel B, D von der Geraden FG in zwei zu einander projektivischen geraden Gebilden geschnitten werden, welche die Punkte F, G entsprechend gemein haben, während die Punkte S, A oder S,

C einander abwechselnd entsprechen, so folgt, dass die Punkte F, G durch je zwei homologe Strahlen, deren Schnittpunkt ausserhalb der Geraden FG liegt, harmonisch getrennt sind.

166. Jede Gerade s, welche mit einer Curve II. Ordnung in einerlei Ebene liegt, aber der Curve sich nicht anschmiegt, schneidet dieselbe in zwei Punkten M, N, daher auch durch den Pol S der Geraden s zwei der Curve sich anschmiegende Gerade SM, SN gehen. Durch jeden dritten Punkt P der Geraden s und dessen Polare p sind die Punkte M, N und eben so die Geraden SM, SN harmonisch getrennt. Denn dem Punkte N_1, welcher zu den drei Punkten P, M, sp der vierte harmonische Punkt ist, ist in Hinsicht auf die Curve die durch ihn gehende Gerade SN_1 zugeordnet, welche zu den drei Geraden p, SM, SP die vierte harmonische Gerade ist, woraus man schliessen kann, dass N_1 mit N zusammenfällt. Wenn also eine Curve II. Ordnung

durch die vier Eckpunkte eines vollständigen Vierecks geht, so sind die drei Punkte, in deren jedem zwei einander gegenüberliegende Seiten des Vierecks sich schneiden, die Eckpunkte eines zur Curve gehörigen Polardreiecks.

die vier Seiten eines vollständigen Vierseits berührt, so sind die drei Geraden, deren jede zwei einander gegenüberliegende Eckpunkte des Vierseits verbindet, die Seiten eines zur Curve gehörigen Polardreiecks.

Anm. Durch das Bisherige ist die Gültigkeit der obigen Sätze nur für die Ordnungscurven reeller Polarsysteme bewiesen.

167. Die Ordnungsfläche F eines räumlichen Polarsystems, welches nämlich kein Nullsystem ist, ist nichts anderes als der Inbegriff von allen Punkten, deren jeder in seiner Polare liegt. Der Inbegriff von allen Ebenen, deren jede durch ihren Pol geht, ist der der Fläche sich anschmiegende Ebenenbündel. Wird eine Gerade p von der ihr zugeordneten Geraden p_1 geschnitten, so hat das gerade Gebilde p mit der Fläche F nur den Punkt pp_1 und der Ebenenbüschel p mit dem der Fläche F sich anschmiegenden Ebenenbündel nur die Ebene pp_1 gemein.

Von einer Fläche II. Ordnung und einer ausserhalb derselben liegenden Geraden wird gesagt, dass sie in einem gemeinschaft-

lichen Punkte sich berühren oder schneiden, je nachdem sie nur diesen Punkt oder noch einen Punkt mit einander gemein haben.

168. Jede reelle Gerade a, welche in einem reellen räumlichen Polarsysteme weder sich selbst zugeordnet ist noch von der ihr zugeordneten Geraden a_1 geschnitten wird, schneidet die Ordnungsfläche F des Systems entweder in zwei reellen oder in zwei einander conjungirten imaginären Punkten. Eben so schneiden sich in der Geraden a entweder zwei reelle oder zwei einander conjungirte imaginäre Ebenen des der Fläche F sich anschmiegenden Ebenenbündels.

Da nämlich das gerade Gebilde a und der ihm zugeordnete Ebenenbüschel a_1 reell-projektivisch zu einander sind und überdiess involutorisch liegen, so liegen (155) zwei Punkte M, N der Geraden a, welche entweder beide reell oder beide imaginär und im letztern Falle einander conjungirt sind, in den ihnen zugeordneten Ebenen und also auch in der Fläche F, während durch jeden dritten in der Geraden a befindlichen Punkt und dessen Polare die Punkte M, N und daher auch die Ebenen a_1M, a_1N harmonisch getrennt sind. Eben so hat die Fläche F mit der Geraden a_1 zwei Punkte S, T gemein, in welchen derselben zwei reelle oder zwei einander conjungirte imaginäre Ebenen aS, aT des Ebenenbüschels a sich ansckmiegen. Zu bemerken ist noch, dass die Gerade MS, welche die Punkte M, S mit einander verbindet, der Schnittlinie der Ebenen a_1M, aS, also sich selbst zugeordnet ist und mithin in der Fläche F liegt. Dasselbe gilt von den Geraden MT, NS, NT.

169. Jede reelle Fläche F, welche die Ordnungsfläche eines räumlichen Polarsystems ist, wird von jeder ihr sich anschmiegenden reellen Ebene P entweder in zwei reellen oder in zwei einander conjungirten imaginären Geraden geschnitten, je nachdem nämlich die Fläche F zwei reelle Regelschaaren enthält oder mit keiner reellen Geraden mehr als zwei Punkte gemein hat.

Da jeder Geraden a, welche in der Ebene P liegt und durch deren Pol P_1 geht, eine Gerade a_1 zugeordnet ist, welche ebenfalls durch den Punkt P_1 geht und in der Ebene P liegt, so ist diese Ebene der Träger und ihr Pol P_1 der Mittelpunkt eines in dem Polarsysteme enthaltenen involutorischen Strahlenbüschels $a a_1 . b b_1 \ldots$, dessen Ordnungsstrahlen m, n in der Fläche F liegen und (153)

entweder beide reell oder beide imaginär und in diesem Falle einander conjungirt sind. Dass übrigens alle Punkte, welche die Fläche F mit der Ebene P gemein hat, in den Geraden m, n liegen und jede von P verschiedene Ebene, welche durch den Punkt P_1 geht und der Fläche F sich anschmiegt, die Ebene P in einer von den beiden Geraden m, n schneidet, geht daraus hervor, weil diese Linien durch je zwei einander zugeordnete Strahlen des erwähnten involutorischen Strahlenbüschels harmonisch getrennt sind.

170. Wenn in einem Polarsysteme jedem Eckpunkte des reellen Tetraeders ABCD die ihm gegenüberliegende Seite und dem reellen Punkte P, welcher in keiner Seite des Tetraeders liegt, die reelle Ebene P_1 zugeordnet ist, so schneidet diese entweder vier oder drei oder keine der sechs Strecken, deren jede zwei Eckpunkte des Tetraeders verbindet und von der durch den Punkt P und die beiden übrigen Eckpunkte des Tetraeders gehenden Ebene geschnitten wird. Im ersten Falle, wenn nämlich die Ordnungsfläche F des Polarsystems zwei Paar Gegenkanten des Tetraeders in reellen Punkten schneidet, enthält dieselbe zwei reelle Regelschaaren. Im zweiten Falle, wenn nämlich die Fläche F drei durch einen und denselben Eckpunkt gehende Kanten des Tetraeders in reellen Punkten schneidet und daher einen Eckpunkt des Tetraeders einschliesst, ist dieselbe zwar reell, hat aber mit keiner reellen Geraden mehr als zwei Punkte gemein. Im dritten Falle ist jeder Punkt der Fläche imaginär.

Jede reelle Ebene Q, welche nicht durch ihren Pol Q_1 geht, schneidet die Fläche F in der Ordnungscurve K eines reellen ebenen Polarsystems, in welchem ein Punkt A und eine Gerade a einander zugeordnet sind, wenn in dem räumlichen Polarsysteme dem Punkte A die Ebene Q_1a und also der Geraden a die Gerade Q_1A zugeordnet ist. Dem der Curve K sich anschmiegenden Strahlenbüschel ist also in dem räumlichen Polarsysteme die Kegelfläche zugeorduet, welche die Curve K aus dem Punkte Q_1 projicirt. Da nun je zwei einander zugeordnete Elemente dieser Gebilde sich schneiden, folglich jede Gerade, welche der Kegelfläche angehört, mit der Fläche F nur einen Punkt gemein hat, so kann man sagen, dass die beiden Flächen in der Curve K sich berühren. Gleichwie endlich diese Curve der Inbegriff von allen Punkten ist, welche die

Fläche F mit der Ebene Q gemein hat, so ist der der erwähnten Kegelfläche sich anschmiegende Ebenenbüschel der Inbegriff von allen denjenigen der Fläche F sich anschmiegenden Ebenen, welche durch den Punkt Q_1 gehen. — In dem zweiten der oben betrachteten Fälle wird die Fläche F von drei Seiten des Tetraeders ABCD in reellen Curven, von der vierten Seite aber in einer imaginären Curve geschnitten.

171. Jede imaginäre Ebene ABCD, deren reelle Axe s in einer reellen Regelfläche F liegt, schneidet die Fläche auch noch in einer imaginären Geraden II. Art.

Es seien a, b, c, d diejenigen in der Regelfläche liegenden Geraden, welche aus der Axe s durch die Ebenen A, B, C, D projicirt werden, so ist abcd eine imaginäre II. Art, welche sowohl in der imaginären Ebene ABCD als auch, da der Wurf abcd in Hinsicht auf die Fläche F sich selbst zugenordnet ist, in dieser Fläche liegt. Um noch zu beweisen, dass jede dritte Gerade u, welche in der Ebene ABCD liegt und durch deren Pol s(abcd) geht, von der ihr zugeordneten Geraden u_1 durch die Geraden s, abcd harmonisch getrennt ist, nehme man irgend eine reelle Ebene H an, welche die Fläche F in einer Curve K schneidet. Da nun die Punkte Hu, Hu_1 in Hinsicht auf die Fläche F und also auch in Hinsicht auf die Curve K einander conjugirt, folglich (166) durch den Punkt Hs und den in der Geraden abcd befindlichen Punkt der Ebene H harmonisch getrennt sind, so sind auch die Geraden u, u_1 durch die Geraden s, abcd harmonisch getrennt.

172. Die Ordnungsfläche F eines reellen räumlichen Polarsystems wird von jeder ihr sich anschmiegenden imaginären Ebene P, deren reelle Axe a nicht in der Fläche liegt, entweder in zwei imaginären Geraden I. Art oder in zwei imaginären Geraden II. Art geschnitten.

Da nämlich (167) die Gerade a mit der ihr zugeordneten Geraden a_1, in welcher der imaginäre Pol S der Ebene P liegt, keinen Punkt gemein hat, so schneidet sie (168) die Fläche F in zwei Punkten M, N, welche entweder beide reell oder beide imaginär sind. Diese Punkte werden aber aus dem Punkte S durch zwei Gerade SM, SN projicirt, welche sowohl in der Ebene P als auch (168) in der Fläche F liegen. Jede dritte Gerade u, welche in der

Ebene P liegt und durch deren Pol S geht, ist von der ihr zugeordneten Geraden u_1 durch die Geraden SM, SN harmonisch getrennt, weil die Punkte au, au_1 durch die Punkte M, N harmonisch getrennt sind. Der erste der im Satze erwähnten Fälle findet nur statt, wenn die Fläche F reell ist aber mit keiner reellen Geraden mehr als zwei Punkte gemein hat.

173. Jede Gerade, welche mit der Ordnungsfläche F eines räumlichen Polarsystems mehr als zwei Punkte gemein hat oder durch welche mehr als zwei der Fläche sich anschmiegende Ebenen gehen, ist sich selbst zugeordnet.

Es seien P, Q die Pole von irgend zwei der Fläche F sich anschmiegenden Ebenen P_1, Q_1. Wenn nun die Gerade PQ nicht sich selbst zugeordnet ist, so hat sie (167) mit der ihr zugeordneten Geraden $P_1 Q_1$ keinen Punkt gemein und alsdann sind, da die Ebene P_1 die Fläche F in zwei Geraden PS, PT schneidet, die Geraden PQ, $P_1 Q_1$ zwei Kanten eines Tetraeders PQST, dessen vier übrige Kanten in der Fläche F liegen. Die Geraden SP, SQ sind durch jeden Punkt, welcher ausserhalb derselben aber mit ihnen in einerlei Ebene liegt, und dessen Polare harmonisch getrennt, daher die Gerade PQ mit der Fläche F nur die Punkte P, Q und der Ebenenbüschel, dessen Axe die Gerade $P_1 Q_1$ ist, mit dem der Fläche F sich anschmiegenden Ebenenbündel nur die Ebenen P_1, Q_1 gemein hat.

Anm. Da die in 169—172 enthaltenen Sätze reelle Polarsysteme voraussetzen, so ist auch die Gültigkeit des obigen Satzes vorläufig nur für reelle Polarsysteme bewiesen. Dasselbe ist in Hinsicht auf den nächstfolgenden Satz zu bemerken.

174. In jeder Fläche F, welche die Ordnungsfläche eines räumlichen Polarsystems ist, sind zwei Regelschaaren enthalten, von welchen jede die Leitschaar der andern ist, so dass nämlich jede Gerade der einen Schaar von jeder Geraden der andern Schaar geschnitten wird, während je zwei Gerade, welche einer und derselben Schaar angehören, keinen Punkt mit einander gemein haben. Jede der Fläche F sich anschmiegende Ebene schneidet dieselbe in einer Geraden der einen Schaar und in einer Geraden der andern Schaar, daher auch in jedem Punkte der Fläche F eine Gerade der einen Schaar von einer Geraden der andern Schaar geschnitten wird.

Da nämlich je zwei in der Fläche F liegende sich schneidende Gerade a, p durch jeden Punkt, welcher in der Ebene ap aber in keiner der Geraden a, p liegt, und dessen Polare harmonisch getrennt sind, so folgt, dass jede dritte in der Fläche F liegende Gerade die eine von den beiden erstern schneidet mit der andern aber keinen Punkt gemein hat.

Wenn die Fläche F reell ist aber mit keiner reellen Geraden mehr als zwei Punkte gemein hat, so ist jede in ihr liegende Gerade eine imaginäre Gerade I. Art. Enthält die Fläche F zwei reelle Regelschaaren, so ist jede in ihr liegende imaginäre Gerade eine imaginäre Gerade II. Art. Ist kein Punkt der Fläche reell, so ist jede in ihr liegende Gerade eine imaginäre Gerade II. Art. Die Ordnungsfläche eines reellen räumlichen Polarsystems, in welchem keine reelle Gerade sich selbst zugeordnet ist, heisst ein Ellipsoid oder Parabaloid oder Hyperboloid, je nachdem sie die unendlich ferne Ebene in einer imaginären Curve oder in zwei einander conjungirten imaginären Geraden oder in einer reellen Curve schneidet. Ein Ellipsoid kann also auch imaginär sein.

---

§. 12.

Imaginäre Elemente in reellen Elementargebilden.

175. Geht die Ordnungsfläche eines reellsn räumlichen Polarsystems durch die reelle Gerade a und durch die imaginäre Gerade abcd, so geht sie auch durch die reellen Geraden b, c, d. Denn wäre dem Wurfe abcd ein anderer Wurf $ab_1c_1d_1$ zugeordnet, so wäre auch (118) der imaginären Geraden abcd eine andere imaginäre Gerade $ab_1c_1d_1$ zugeordnet, was gegen die Annahme ist.

Durch eine reelle Gerade a und eine imaginäre Gerade u II. Art, welche die reelle Gerade nicht schneidet, ist eine reelle Regelschaar bestimmt, der nämlich die beiden gegebenen Geraden und also auch, wenn abcd irgend eine von a ausgehende Darstellung der Geraden u ist, die Geraden b, c, d angehören. Ist v ein imaginärer Leitstrahl der Regelschaar und pqrs irgend eine von einem reellen Leitstrahle p ausgehende Darstellung desselben, so haben die involutorischen Regelschaaren ac.bd..., pr.qs... zwei

gemeinschaftliche Involutionsaxen, welche sich auch dadurch von einander unterscheiden, dass in Hinsicht auf die eine als Träger von Punkten, in Hinsicht auf die andere aber als Schnittlinie von Ebenen die Regelschaaren abc, pqr in einem und demselben Sinne beschrieben sind. Die erstere der erwähnten Geraden ist der reelle Träger des Punktes uv, die letztere aber die reelle Axe der Ebene uv.

176. Durch eine reelle Curve K II. Ordnung und eine reelle Gerade p, welche mit der Curve in einerlei Ebene liegt aber derselben sich nicht anschmiegt, ist ein in der Curve enthaltenes involutorisches Punktgebilde $AA_1 . BB_1 \ldots$ bestimmt, von welchem nämlich die gegebene Gerade die Involutionsaxe und also der Pol P derselben das Involutionscentrum ist. Wenn nun die Curve K und die Gerade p in zwei imaginären Punkten EFE_1F_1, EF_1E_1F sich schneiden und der Sinn ABA_1 mit dem Sinne EFE_1 übereinstimmt, so kann der imaginäre Punkt EFE_1F_1 als Punkt der Curve K durch ABA_1B_1 und der demselben conjungirte Punkt durch AB_1A_1B dargestellt und gesagt werden, dass man den einen oder den andern dieser Punkte, in welchen die Curve K von der Involutionsaxe des involutorischen Gebildes $AA_1 . BB_1 \ldots$ geschnitten wird, erhalte, je nachdem man mit diesem Gebilde den Sinn ABA_1 oder den Sinn AB_1A_1 verbindet. Eben so können, wenn die Curve K in den Punkten A, B, A_1, B_1 von den Geraden a, b, a_1, b_1 berührt wird, die imaginären Tangenten $P(EFE_1F_1)$, $P(EF_1E_1F)$, welche in dem Involutionscentrum des involutorischen Gebildes $aa_1 . bb_1 \ldots$ sich schneiden, als Strahlen des der Curve sich anschmiegenden Strahlenbüschels durch aba_1b_1, ab_1a_1b dargestellt werden. Aus jedem ausserhalb der Ebene liegenden reellen Punkte S wird die Curve K durch eine reelle Kegelfläche projicirt, welcher in den imaginären Geraden $S(ABA_1B_1)$, $S(AB_1A_1B)$ die imaginären Ebenen $S(aba_1b_1)$, $S(ab_1a_1b)$ sich anschmiegen.

Anm. Bisher wurde, wenn von einem imaginären Elemente I. Art die Rede war, immer vorausgesetzt, dass dasselbe durch vier reelle Elemente eines einförmigen Gebildes dargestellt sei.

177. Jedes imaginäre Element, welches in einem reellen Elementargebilde enthalten ist, kann durch vier reelle Elemente dieses Gebildes dargestellt werden, so dass überdiess die Darstellung von

einem gegebenen reellen Elemente des Gebildes ausgeht und zu einem gegebenen ordentlichen Wurfe projektisch ist.

Sind zwei Elementargebilde, was ihre reellen Elemente anbelangt, projektivisch auf einander bezogen, so ist dadurch von selbst jedem imaginären Elemente ABCD in dem einen ein imaginäres Element abcd im andern zugewiesen, indem jedem Wurfe ABCD in dem einen Gebilde ein Wurf abcd im andern entspricht. Wenn überdiess jedes reelle Element des einen Gebildes in dem ihm entsprechenden Elemente des andern liegt, so liegt auch jedes imaginäre Element des erstern Gebildes in dem ihm entsprechenden Elemente des letztern. Es wird hinreichend sein, folgende Fälle zu betrachten, in welchen angenommen ist, dass ABCD... eine Curve II. Ordnung sei.

Ist abcd... ein Strahlenbüschel I. Ordnung, so schneidet (164) die imaginäre Gerade abcd die Curve in dem imaginären Punkte p(abcd), welcher in der Involutionsaxe p des involutorischen Gebildes AC.BD... liegt und als Punkt der Cnrve durch ABCD dargestellt wird. — Ist abcd... eine Regelschaar, so seien p, q irgend zwei reelle Leitstrahlen derselben. Da nun der Punkt ABCD in den beiden Geraden liegt, in welchen die reelle Ebene ABC die imaginären Ebenen p(abcd), q(abcd) schneidet, so liegt er auch in diesen beiden Ebenen und also auch in ihrer Schnittlinie abcd. — Ist abcd ein Strahlenbüschel II. Ordnung und S irgend ein ausserhalb der Ebene ABC liegender reeller Punkt, so kann man (20) eine reelle Regelschaar $a_1 b_1 c_1 d_1$... annehmen, welche zu der Curve ABCD... und daher auch zu dem Ebenenbüschel S(abcd...) projektivisch ist, so dass überdiess jede reelle Gerade der Regelschaar durch den ihr entsprechenden Punkt der Curve geht und in der ihr entsprechenden Ebene des Ebenenbüschels liegt. Da aber alsdann auch jede imaginäre Gerade der Regelschaar durch den ihr entsprechenden Punkt der Curve geht und in der ihr entsprechenden Ebene des Ebenenbüschels liegt, so liegt auch der imaginäre Punkt ABCD in der imaginären Ebene S(abcd) und also auch in der imaginären Geraden abcd.

Wo also auch früher von zwei zu einander projektivischen Elementargebilden die Rede war, welche ein zu ihnen perspektivisches drittes Elementargebilde erzeugen, so gilt diess nun mit Rück-

sicht auf die imagienären Elemente der Gebilde, so dass nämlich durch je zwei homologe imaginäre Elemente P, P_1 der beiden erstern Gebilde das ihnen entsprechende imaginäre Element PP_1 des dritten bestimmt ist.

178. Wenn zwei reelle Elementargebilde reell-projektivisch zu einander sind, so entspricht auch jedem imaginären harmonischen Wurfe abcd in dem einen Gebilde ein imaginärer harmonischer Wurf ABCD im andern.

Da es, wie in 149, hinreichend ist, die Fälle zu betrachten, in welchen die Gebilde perspektivisch zu einander sind, so nehme man an, dass das erstere Gebilde eine Regelschaar und das letztere eine zu dieser Regelschaar perspektivische Curve K sei. Weil nun der Wurf abcd aus jedem Leitstrahle p der Regelschaar durch einen harmonischen Ebenenbüschel p(abcd) und also der Wurf ABCD aus jedem Punkte pK der Curve durch einen harmonischen Strahlenbüschel projicirt wird, so sind in der Curve die Punkte A, C durch die Punkte B, D harmonisch getrennt. Uebrigens lässt sich leicht auch noch beweisen, dass die Geraden AC, BD in Hinsicht auf die Curve K einander conjugirt sind.

Die in 150—154 über einförmige Gebilde aufgestellten Sätze gelten also nun von Elementargebilden überhaupt.

179. Durch einen imaginären Punkt ABCD, eine durch denselben gehende imaginäre Gerade S(ABCD) und

einen reellen Punkt P, welcher mit den beiden erstern Elementen in einer und derselben reellen Ebene aber weder in dem reellen Träger AB des imaginären Punkts noch in der imaginären Geraden liegt, ist eine reelle Curve K II. Ordnung bestimmt, welche nämlich in dem gegebenen imaginären Punkte die gegebene imaginäre Gerade berührt und überdiess durch den gegebenen reellen Punkt geht.

eine reelle Gerade, welche mit den beiden erstern Elementen in einer und derselben reellen Ebene liegt aber weder durch den imaginären Punkt ABCD noch durch den reellen Punkt S der imaginären Geraden geht, ist eine reelle Curve II. Ordnung bestimmt, welche nämlich die gegebene imaginäre Gerade in dem gegebenen imaginären Punkte berührt und auch der gegebenen reellen Geraden sich anschmiegt.

Geht die Gerade SA, was man annehmen kann, durch den

Punkt P, so ist K die Ordnungscurve desjenigen Polarsystems, in welchem jedem Eckpunkte des Dreiecks SBD die ihm gegenüberliegende Seite und dem Punkte P die Gerade PC zugeordnet ist.

180. Durch ein reelles Dreieck ABC und einen imaginären Punkt P, dessen reeller Träger die Seiten des Dreiecks in drei Punkten schneidet, ist eine reelle Curve K II. Ordnung bestimmt, welche nämlich durch die drei Eckpunkte des gegebenen Dreiecks und durch den gegebenen imaginären Punkt geht.

Durch ein reelles Dreieck und eine imaginäre Gerade, welche die Seiten des Dreiecks in imaginären Punkten schneidet, ist eine reelle Curve II. Ordnung bestimmt, welche nämlich die drei Seiten des gegebenen Dreiecks und die gegebene imaginäre Gerade berührt.

Bezieht man (150) die Strahlenbüschel A, B reell-projektivisch so aufeinander, dass den Strahlen AC, AP des erstern die Strahlen BC, BP des letztern entsprechen, so erzeugen sie die im Satze erwähnte Curve K. Bezieht man aber die Strahlenbüschel A, B reell-projektivisch so auf einander, dass den Strahlen AC, AP des erstern die Strahlen BA, BP des letztern entsprechen, so erzeugen sie diejenige reelle Curve II. Ordnung, welche die Gerade AC im Punkte A berührt und überdiess durch die beiden Punkte B, P geht.

181. Durch einen reellen Punkt A und vier imaginäre Punkte P, P_1, Q, Q_1, welche paarweise einander conjungirt sind, ist eine reelle Curve II. Ordnung bestimmt, welche nämlich durch die fünf gegebenen Punkte geht, vorausgesetzt dass diese in einerlei Ebene aber keine drei derselben in einer und derselben Geraden liegen.

Durch eine reelle Gerade und vier imaginäre Gerade, welche paarweise einander conjungirt sind, ist eine reelle Curve II. Ordnung bestimmt, welche nämlich die fünf gegebenen Geraden berührt, vorausgesetzt dass diese in einerlei Ebene liegen aber keine drei derselben in einem und demselben Punkte sich schneiden.

Es seien F, G, H die reellen Punkte, in welchen die Geraden PP_1, PQ, PQ_1 beziehlich von den Geraden QQ_1, P_1Q_1, P_1Q geschnitten werden, so muss (166) in Hinsicht auf die Curve jeder Eckpunkt des Dreiecks FGH der ihm gegenüberliegenden Seite zu-

geordnet sein und daher die Curve auch durch die beiden Punkte B, C gehen, von welchen der erstere durch den Punkt F und die Gerade GH, der letztere aber durch den Punkt G und die Gerade FH vom Punkte A harmonisch getrennt ist. Und wenn K die reelle Curve II. Ordnung ist, welche durch die drei reellen Punkte A, B, C und die einander conjungirten imaginären Punkte P, P_1 geht, so ist in Hinsicht auf dieselbe dem Punkte F die Gerade GH zugeordnet, indem diese Elemente sowohl durch die Punkte A, B als auch durch die Punkte P, P_1 harmonisch getrennt sind. Da endlich die Punkte A, C durch den Punkt G und die Gerade FH harmonisch getrennt sind, also in Hinsicht auf die Cure K dem Punkt G die Gerade FH zugeordnet ist, so geht dieselbe auch durch die Punkte Q, Q_1.

---

§. 13.

Gemeinschaftliche Punkte und Tangenten zweier Curven II. Ordnung.

182. Wenn zwei reelle Polarsysteme ein imaginäres Polardreieck FGH mit einander gemein haben, so hat dieses einen reellen Eckpunkt und zwei in einer und derselben reellen Geraden liegende imaginäre Eckpunkte.

Ist nämlich G ein imaginärer Punkt, so ist auch die ihm zugeordnete Gerade FH imaginär, daher das Dreieck wenigstens noch einen imaginären Eckpunkt H hat. Würden nun die reellen Träger der Punkte G, H sich schneiden, so gäbe es (157) nur ein reelles Polarsystem, in welchem den Punkten G, H die Geraden FH, FG zugeordnet sind. Da hiernach die Punkte G, H in einer und derselben reellen Geraden liegen, so ist auch der Punkt F reell.

Haben die Polarsysteme nur das Polardreieck FGH mit einander gemein, so sind die Punkte G, H einander conjungirt, indem die zu einander projektivischen geraden Gebilde, von welchen das eine in dem einen Polarsysteme und das andere in dem andern Polarsysteme dem Strahlenbüschel F zugeordnet ist, nur die Punkte G, H entsprechend gemein haben.

183. Wenn zwei reelle Polarsysteme mehr als ein Polardreieck mit einander gemein haben, so berühren sich die Ordnungs-

curven der Systeme entweder in zwei reellen oder in zwei einander conjungirten imaginären Punkten.

Man nehme an, dass in beiden Polarsystemen jedem Eckpunkte des Dreiecks FGH die ihm gegenüberliegende Seite und dem Punkte P die Gerade p zugeordnet ist, so muss der Punkt P in einer Seite des Dreiecks FGH liegen, weil es, wenn dem nicht so wäre, nur ein Polarsystem geben würde, in welchem den Punkten F, G, H, P die Geraden GH FH, FG, p zugeordnet sind. Wenn nun der Punkt P in der Geraden GH liegt, so hat man zu unterscheiden, ob diese Gerade von der Geraden p im Punkte P oder in einem andern Punkte Q geschnitten wird. Im erstern Falle berühren sich die Ordnungscurven der Polarsysteme im Punkte P und in dem Punkte, welcher vom Punkte P durch die Punkte G, H harmonisch getrennt ist. Im letzteren Falle berühren sich die Curven in den Punkten, welche sowohl durch die Punkte G, H als auch die P, Q harmonisch getrennt sind. Hätten die Curven einen ausserhalb der Geraden GH liegenden Punkt A mit einander gemein, so würden sie, da jeder durch den Punkt F gehenden Geraden in beiden Polarsystemen ein und derselbe Punkt zugeordnet ist, auch im Punkt A und in dem Punkte B sich berühren, welcher vom Punkte A durch den Punkt F und die Gerade GH harmonisch getrennt ist. Alsdann würde aber auch jedem in der Geraden AB befindlichen Punkte in beiden Systemen eine und dieselbe Gerade zugeordnet sein, was nicht möglich ist. Da hiernach die Curven nur zwei Punkte mit einander gemein haben, so sind diese entweder beide reell oder beide imaginär und einander conjungirt.

Schneiden sich die Ordnungscurven von zwei reellen Polarsystemen in vier Punkten, so sind diese entweder sämmtlich reell oder sämmtlich imaginär, oder es sind zwei reell, die beiden übrigen aber imaginär. Das Polardreieck, welches (166) die Systeme mit einander gemein haben, ist in den beiden erstern Fällen reell, im letztern aber imaginär.

184. Wenn zwei reelle Polarsysteme ein reelles Polardreieck FGH aber nicht noch ein Polardreieck mit einander gemein haben, so schneiden sich (183) ihre Ordnungscurven entweder in vier reellen oder in vier imaginären Punkten. Eben so haben die Cur-

ven vier gemeinschaftliche Tangenten, welche entweder sämmtlich reell oder sämmtlich imaginär sind.

Zu jedem reellen Punkte P, welcher in keiner Seite des Dreiecks FGH liegt, giebt es einen reellen Punkt Q, welcher dem Punkte P in beiden Polarsystemen conjugirt ist und daher ebenfalls in keiner Seite des Dreiecks FGH liegt. Läge nämlich der Punkt Q in einer Seite dieses Dreiecks, so wäre ihm in beiden Polarsystemen die Gerade zugeordnet, welche den Punkt P mit dem jener Seite gegenüberliegenden Eckpunkte verbindet, was gegen die Annahme ist. Da nun die zu einander projektivischen Strahlenbüschel, von welchen der eine in dem einen Polarsysteme und der andere in dem andern Polarsysteme dem durch die beiden Punkte G, P gehenden geraden Gebilde p zugeordnet ist, den Strahl FH entsprechend gemein haben, so erzeugen sie ein zu ihnen perspektivisches und also auch zu dem Gebilde p projektivisches gerades Gebilde q, welches durch die beiden Punkte G, Q geht. Aus dem Punkte F werden die zu einander projektivischen geraden Gebilde p, q durch zwei zu einander projektivische Strahlenbüschel projicirt, welche, da die Strahlen FG, FH derselben einander abwechselnd entsprechen, involutorisch liegen und daher zwei Strahlen m, n entsprechend gemein haben. Da nun in beiden Polarsystemen dem dem Punkte mp der Punkt mq und dem Schnittpunkte der Geraden m, GH der Punkt F conjugirt ist, so schneidet die Gerade m die Ordnungscurven der Systeme in denselben zwei Punkten. Dasselbe gilt von der Geraden n. Die sechs Seiten des vollständigen Vierecks, in dessen vier Eckpunkten die Curven sich schneiden, sind also nichts anders als die Ordnungsstrahlen der drei involutorischen Strahlenbüschel F(GH.PQ...), G(FH.PQ...), H(FG.PQ...).

Schliessen beide Curven einen und denselben Eckpunkt des Dreiecks FGH ein, so schneiden sie sich in reellen oder imaginären Punkten, je nachdem ihre gemeinschaftlichen Tangenten reell oder imaginär sind. Wenn hingegen die eine von den beiden Curven einen Eckpunkt des Dreiecks FGH einschliesst, in welchem zwei reelle Tangenten der andern sich schneiden, so sind entweder die Schnittpunkte der Curven reell und ihre gemeinschaftlichen Tangenten imaginär, oder es sind die Schnittpunkte imaginär und die gemeinschaftlichen Tangenten reell.

185. Wenn zwei reelle Polarsysteme ein imaginäres Polardreieck FGH aber nicht noch ein Polardreieck mit einander gemein haben, so schneiden sich (183) ihre Ordnungscurven in zwei reellen und in zwei imaginären Punkten. Eben so haben die den Curven sich anschmiegenden Strahlenbüschel zwei reelle und zwei imaginäre Strahlen mit einander gemein.

Es sei der reellen Geraden s, welche die Seiten des Dreiecks FGH in einem reellen und (182) zwei einander conjungirten imaginären Punkten schneidet, in dem einen Polarsysteme der Punkt S und im andern der Punkt S_1 zugeordnet, so erzeugen die zu einander projektivischen Strahlenbüschel S, S_1, von welchen der eine in dem einen Polarsysteme und der andere in dem andern Polarsysteme dem geraden Gebilde s zugeordnet ist, eine zu ihnen perspektivische und daher auch zu dem Gebilde s projektivische Curve K II. Ordnung, welche durch die drei Eckpunkte des Dreiecks FGH geht. Aus dem rellen Punkte F dieses Dreiecks werden die zu einander projektivischen Punktgebilde s, K durch zwei zu einander projektivische Strahlenbüschel projicirt, welche, da die Strahlen FG, FH derselben einander abwechselnd entsprechen, involutorisch liegen und (152) zwei reelle Strahlen m, n entsprechend gemein haben. Wenn nun die Gerade m die Curve K in zwei Punkte F, L schneidet, so ist in beiden Polarsystemen dem Punkte sm der Punkt L und dem Schnittpunkte R der Geraden m, GH der Punkt F zugeordnet, woraus man schliessen kann, dass die Gerade m die Ordnungscurven der Polarsysteme in denselben zwei Punkten schneidet. Eben so wird diess von der Geraden n bewiesen, wenn nämlich auch diese mit der Curve K zwei Punkte gemein hat. Wenn aber die Gerade n die Curve K im Punkte F berührt, als die drei Geraden FG, s, n in einem und demselben Punkte sich schneiden, so darf man nur für s eine Gerade nun annehmen, welche durch den Punkt R geht.

186. Wenn die Ordnungscurven von zwei in einerlei Ebene liegenden reellen Polarsystemen eine reelle Gerade m in denselben zwei Punkten A, B schneiden, aber durch keinen dieser Punkte eine gemeinschaftliche Tangente der Curven geht, so giebt es eine andere reelle Gerade n, welche beide Curven entweder in einem

und demselben Punkte berührt oder in denselben zwei ausserhalb der erstern Geraden liegenden Punkten schneidet.

Es sei der Geraden m in dem einen Polarsysteme der Punkt P und im andern der Punkt P_1 zugeordnet, so ist in beiden Systemen der Geraden PP_1 der Punkt F zugeordnet, welcher vom Schnittpunkte S der Geraden m, PP_1 durch die Punkte A, B harmonisch getrennt ist. Wenn nun in dem erstern Systeme der Geraden FP_1 der Punkt Q und im letztern der Geraden FP der Punkt Q_1 zugeordnet ist und T den von S verschiedenen Ordnungspunkt des involutorischen geraden Gebildes $SS.QQ_1\ldots$ bezeichnet, so ist FT die im Satze erwähnte Gerade n. Denn die zu einander projektivischen geraden Gebilde $PQS\ldots$, $P_1SQ_1\ldots$, von welchen das eine in dem einen Polarsysteme und das andere in dem andern Polarsysteme dem Strahlenbüschel $F(SP_1P\ldots)$ zugeordnet ist, haben (154) entweder nur den Punkt T oder zwei Punkte G, H entsprechend gemein, welche durch die Punkte S, T harmonisch getrennt sind. Im erstern Falle berührt die Gerade FT im Punkte T die Ordnungscurven der beiden Polarsysteme, während im letztern Falle die Polarsysteme das Polardreieck FGH mit einander gemein haben und daher auch in der Geraden n zwei gemeinschaftliche Punkte der Curven liegen.

187. Wenn zwei in einerlei Ebene liegende Curven II. Ordnung eine Gerade s in einem und demselben Punkte S berühren, so vertritt dieser Punkt die Stelle von zwei oder drei oder vier gemeinschaftlichen Punkten derselben und die Gerade s die Stelle von zwei oder drei oder vier gemeinschaftlichen Tangenten, je nachdem nämlich die zu einander projektivischen geraden Gebilde, von welchen das eine in Hinsicht auf die eine Curve und das andere in Hinsicht auf die andere Curve dem Strahlenbüschel S zugeordnet st, zwei Punkte S, T oder nur den Punkt S oder alle ihre Punkte — oder, was dasselbe ist, je nachdem die zu einander projektivischen Strahlenbüschel, von welchen der eine in Hinsicht auf die eine Curve und der andere in Hinsicht auf die andere Curve dem geraden Gebilde s zugeordnet ist, zwei Strahlen s, t oder nur den Strahl s oder alle ihre Strahlen — entsprechend gemein haben. Im ersten Falle berühren nämlich die Curven entweder noch eine zweite Gerade in einem und demselben Punkte oder sie haben noch

zwei Punkte mit einander gemein und noch zwei gemeinschaftliche Tangenten, so dass aber keine dieser Tangenten beide Curven in einem und demselben Punkte berührt. Im zweiten Falle haben die Curven nur noch einen Punkt mit einander gemein und nur noch eine gemeinschaftliche Tangente, welche aber nicht durch diesen zweiten gemeinschaftlichen Punkt geht. Im dritten Falle haben die Curven keinen andern Punkt mit einander gemein und keine andere gemeinschaftliche Tangente. Man darf nur, um sich hievon zu überzeugen, die Curven als homologe Gebilde von zwei zu einander projektivischen ebenen Systemen betrachten, welche alle

Strahlen des Strahlenbüschels S und daher auch alle Punkte eines geraden Gebildes u entsprechend gemein haben. Die Gerade u, welche entweder beide Curven in einem und demselben Punkte berührt oder durch zwei gemeinschaftliche Punkte derselben geht, schneidet die Gerade s im ersten der oben erwähnten Fälle im Punkte T, im zweiten aber im Punkte S, während im dritten Falle u mit s identisch ist.

Punkte des geraden Gebildes s und daher auch alle Strahlen eines Strahlenbüschels entsprechend gemein haben. Der Mittelpunkt dieses Büschels, in welchem entweder beide Curven eine und dieselbe Gerade berühren oder zwei gemeinschaftliche Tangenten derselben sich schneiden, ist im ersten der oben erwähnten Fälle ein Punkt der Geraden t, im zweiten ein Punkt der Geraden s aber nur im dritten der Punkt S selbst.

Man kann daher auch sagen, dass die Curven in dem Punkte S im ersten Falle nur zweipunktig, im zweiten Falle aber dreipunktig und im dritten vierpunktig einander sich anschmiegen, weil im Punkte S im dritten Falle ein Berührungspunkt und ein Schnittpunkt, im vierten Falle hingegen zwei Berührungspunkte vereinigt seien. Uebrigens ist der obige Satz vorderhand nur unter der Voraussetzung bewiesen, dass die beiden Curven und die Gerade s, mithin auch der Punkt S reell sind.

188. Wenn zwei Systeme, welche reell-projektivisch und zwar collineär zu einander sind, in einerlei Ebene aber nicht perspektivisch liegen, so haben sie entweder die Eckpunkte und Seiten eines reellen Dreiecks oder die Eckpunkte und Seiten eines imaginären Dreiecks, in welchem jedoch ein Eckpunkt und die demsel-

ben gegenüberliegende Seite reell sind, oder nur vier Elemente, nämlich zwei reelle Punkte und zwei reelle Gerade, oder nur zwei Elemente, nämlich einen reellen Punkt und eine durch ihn gehende reelle Gerade entsprechend gemein.

Es entspreche dem reellen Punkte S des einen Systems der der Punkt S_1 des andern und der Geraden SS_1 des erstern die Gerade s_1 des letztern. Wenn nun, was man annehmen kann, die Gerade s_1 nicht mit SS_1 zusammenfällt, so erzeugen die zu einander projektivischen Strahlenbüschel S, S_1 eine Curve K II. Ordnung, welche die Gerade SS_1 in den Punkten S, S_1 schneidet, die Gerade s_1 aber im Punkt S_1 berührt. Der Curve K des erstern Systems entspricht eine Curve K_1 des letztern, welche im Punkte S_1 die Gerade s_1 und also auch die Curve K schneidet, demnach mit dieser Curve wenigstens noch einen reellen Punkt gemein hat. Je zwei homologe Punkte P, P_1 der Curven werden aus den Punkten S, S_1 durch zwei homologe Gerade SP, S_1P_1 und also aus dem Punkte S_1 durch eine und dieselbe Gerade projicirt. Da hiernach die zu einander collineären Systeme jeden von S_1 verschiedenen gemeinschaftlichen Punkt der beiden Curven und jede nicht durch den Punkt S_1 gehende Gerade, welche beide Curven in denselben zwei Punkten schneidet oder in einem und demselben Punkte berührt, ausserdem aber kein Element entsprechend gemein haben, so findet der erste, zweite, dritte oder vierte der im Satze erwähnten Fälle statt, je nachdem die Curven in vier reellen Punkten oder in zwei reellen und in zwei imaginären Punkten sich schneiden, oder in zwei reellen Punkten sich schneiden und in einem dritten reellen Punkte sich berühren, oder nur einen von S_1 verschiedenen Punkt, in welchem sie also dreipunktig einander sich ansehmiegen, mit einander gemein haben.

189. Wenn zwei Polarsysteme in einerlei Ebene liegen und dem Fünfseite a b c d e in dem einen das Fünfeck ABCDE, in dem andern aber das Fünfeck $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ zugeordnet ist, so sind ABCDE, $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ homologe Gebilde von zwei zu einander collineären Systemen, welche in einerlei Ebene liegen und also entweder alle Punkte eines geraden Gebildes s und alle Strahlen eines Strahlenbüschels S oder (188) nur die drei Eckpunkte und Seiten eines Dreiecks FGH oder nur zwei Punkte S, T und zwei

Gerade, von welchen die eine s durch beide Punkte, die andere t durch den einen S geht, oder nur einen Punkt S und eine durch ihn gehende Gerade s entsprechend gemein haben. Da nun zu jedem Elemente, welches die zu einander collineären Systeme entsprechend gemein haben, ein anderes solches Element es giebt, welches dem erstern in beiden Polarsystemen zugeordnet ist, so folgt, dass die Ordnungscurven K, K_1 derselben im ersten der vier erwähnten Fälle entweder in zwei Punkten sich berühren oder in einem Punkte vierpunktig einander sich anschmiegen, je nachdem nämlich der Punkt S ausserhalb oder in der Geraden s liegt. Im zweiten Falle, wenn nämlich die Polarsysteme das Polardreieck FGH aber auch nur dieses Polardreieck mit einander gemein haben, haben die Curven vier Punkte mit einander gemein und vier gemeinschaftliche Tangenten. Im dritten Falle berühren die Curven (185) in dem Punkte S eine und dieselbe Gerade s, haben aber noch zwei Punkte mit einander gemein und noch zwei gemeinschaftliche Tangenten. Im vierten Falle endlich, in welchem keinem von S verschiedenen Punkte in beiden Polarsystemen eine und dieselbe Gerade zugeordnet ist, schmiegen die Curven in diesem Punkte dreipunktig einander sich an. Uebrigens gelten diese Schlüsse vorderhand nur unter der Voraussetzung, dass die Polarsysteme reell sind.

Anhang.

190. In einem rechtwinkligen Strahlenbündel sollen auch je zwei imaginäre Elemente, welche einander entweder zugeordnet oder conjugirt sind, zu einander senkrecht heissen. Jedem imaginären Strahle $a b a_1 b_1$ ist eine imaginäre Ebene $A B A_1 B_1$ zugeordnet, deren reelle Axe zu dem reellen Träger der imaginären Geraden senkrecht ist. Sind die Geraden a_1, b_1 zu den Geraden a, b beziehlich senkrecht, so liegt die imaginäre Gerade $a b a_1 b_1$ in der ihr zugeordneten Ebene, daher alsdann jedes dieser Elemente auch zu sich selbst senkrecht ist. Jeder reelle Büschel I. Ordnung, dessen Mittelpunkt oder dessen Axe nicht im Unendlichen liegt, enthält also zwei einander conjungirte imaginäre Elemente, deren jedes

zu sich selbst senkrecht ist. Zwei solche einander conjungirte imaginäre Elemente sind aber nichts anderes als die Ordnungselemente eines rechtwinkligen Büschels.

191. Wenn zwei congruente Strahlenbüschel $a b c \ldots$, $a_1 b_1 c_1 \ldots$, welche in einerlei Ebene liegen und einen gemeinschaftlichen eigenlichen Mittelpunkt haben, in einem und demselben Sinne beschrieben sind, so haben sie zwei einander conjungirte imaginäre Strahlen entsprechend gemein, deren jeder zu sich selbst senkrecht ist.

Sind nämlich die Geraden a, a_1 zu einander senkrecht, so liegen die Büschel involutorisch, welcher Fall bereits im Vorigen betrachtet worden ist. Wenn aber der Geraden a_1 des erstern Büschels eine von a verschiedene Gerade a_2 des letztern entspricht, so seien h_1, h_2 diejenigen homologen Strahlen derselben, welche zu den Geraden a_1, a_2 beziehlich senkrecht sind. Da nun $a a_1 a_2 h_1$ ein harmonischer Wurf ist, so folgt der Satz aus 154. Nennt man je zwei unendlich ferne Punkte der Ebene, welche in zwei zu einander senkrechten Richtungen liegen, einander zugeordnet, so hat man ein involutorisches Punktgebilde, dessen Träger die unendlich ferne Gerade der Ebene ist. Die Ordnungspunkte dieses Gebildes werden aus jedem reellen eigentlichen Punkte durch zwei einander conjungirte imaginäre Gerade projicirt, deren jede zu sich selbst senkrecht ist, und sollen daher die Normalpunkte der Ebene heissen. Liegen zwei ebene Systeme, welche einander ähnlich sind, in einerlei Ebene aber nicht perspektivisch, so haben sie einen reellen eigentlichen Punkt und zwei unendlich ferne Punkte entsprechend gemein. Die beiden letztern Punkte sind entweder die Normalpunkte der Ebene oder zwei durch diese Punkte harmonisch getrennte reelle Punkte, je nachdem nämlich je zwei homologe Winkel der Systeme in einem und demselben Sinne oder in entgegengesetztem Sinne beschrieben sind. Wenn jedoch die Systeme nicht blos ähnlich sondern congruent sind, so haben sie im letztern der erwähnten Fälle keinen eigentlichen Punkt und daher auch nur eine eigentliche Gerade entsprechend gemein.

192. Jeder Strahlenbüschel II. Ordnung, welcher einer Parabel sich anschmiegt, enthält (164) zwei imaginäre Strahlen, deren jeder zu sich selbst senkrecht ist. Der gemeinschaftliche reelle

Punkt dieser Strahlen heisst der Brennpunkt der Parabel. Hat die Ordnungscurve eines reellen ebenen Polarsystems mit der unendlich fernen Geraden der Ebene zwei Punkte gemein, so hat man zu unterscheiden, ob diess die Normalpunkte der Ebene oder zwei andere Punkte sind. Im erstern Falle ist die Curve, da je zwei einander conjugirte Durchmesser derselben zu einander senkrecht sind, ein Kreis. Im letztern Falle, wenn nämlich nur zwei einander conjugirte Durchmesser zu einander senkrecht sind, enthält (165) der der Curve sich anschmiegende Strahlenbüschel vier Strahlen, deren jeder zu sich selbst senkrecht ist. Die beiden reellen Punkte dieser vier imaginären Geraden sind die Brennpunkte der Curve.

Ist die Ebene gegeben, in welcher ein Kreis liegt, so sind auch zwei Punkte gegeben, durch welche derselbe geht. Concentrische Kreise, welche in einerlei Ebene liegen, berühren sich in den Normalpunkten dieser Ebene.

193. Zwei in einerlei Ebene liegende congruente Strahlenbüschel, welche keinen Strahl entsprechend gemein haben, erzeugen entweder einen Kreis oder eine gleichseitige Hyperbel, je nachdem sie nämlich in einem und demselben oder in entgegengesetztem Sinne beschrieben sind.

Die unendlich ferne Gerade der Ebene schneidet die Strahlenbüschel in zwei zu einander projektivischen geraden Gebilden, welche im erstern Falle die Normalpunkte der Ebene, im letztern aber zwei durch diese Punkte harmonisch getrennte reelle Punkte entsprechend gemein haben. Im letztern Falle liegen (152) die erwähnten Punktgebilde involutorisch, daher in diesem Falle der Mitelpunkt der Curve in dem gemeinschaftlichen Strahle der beiden Büschel liegt. Und wenn zwei reelle Strahlenbüschel I. Ordnung zu einem und demselben Kreise oder zu einer und derselben gleichseitigen Hyperbel perspektivisch sind und überdiess im letztern Falle der gemeinschaftliche Strahl der Büschel durch den Mittelpunkt der Curve geht, so sind sie congruent.

194. Die Ordnungsfläche eines rechtwinklichen Strahlenbündels hat die Eigenschaft, dass jede in ihr liegende Gerade und jede ihr sich anschmiegende Ebene zu sich selbst senkrecht ist. Die imaginäre Curve, in welcher die unendlich ferne Ebene von

allen solchen Kegelflächen geschnitten wird, soll der Normalkreis heissen. Jede Fläche II. Ordnnng, welche durch diesen Kreis geht aber keine Kegelfläche ist, ist eine Kugelfläche, indem je zwei einander conjugirte Durchmesser derselben zu einander senkrecht sind. Auch jede in einer Kugelfläche liegende Gerade ist zu sich selbst senkrecht.

Jede reelle Fläche II. Ordnung, welche den Normalkreis in zwei Punkten berührt, ist eine Drehungsfläche, deren Drehungsaxe dem reellen Träger der Berührungspunkte zugeordnet ist.

195. Wenn eine reelle Fläche II. Ordnung den Normalkreis in vier Punkten A, B, C, D schneidet, deren reelle Träger AB, CD nicht in der Fläche liegen, so wird sie von jeder Ebene, welche durch die eine oder andere der erwähnten unendlich fernen Geraden aber nicht zugleich durch zwei in der Fläche liegende Gerade geht, in einem Kreise geschnitten. Die drei Punkte, in deren jedem zwei einander gegenüberliegende Seiten des vollständigen Vierecks ABCD sich schneiden, werden, wenn die Fläche einen Mittelpunkt hat, aus diesem Punkte durch die drei Axen derselben projicirt.

Durch zwei reelle Ebenen und eine reelle Gerade, welche beide Ebenen in einem und demselben eigentlichen Punkte schneidet und höchstens von einer andern Geraden durch die Ebenen harmonisch getrennt ist, ist (181) eine reelle Kegelfläche II. Ordnung bestimmt, welche nämlich durch die gegebene Gerade geht und von jeder reellen Ebene, die zu irgend einer der gegebenen Ebenen parallel ist, in einem Kreise geschnitten wird.